Fractions : on récapitule tout

I - Comprendre et représenter les fractions

a. Définition des fractions

Vous avez déjà rencontré « $\frac{1}{3}$ ». Vous savez que :

- C'est une fraction
- Elle se lit « un tiers »
- On peut la représenter de différentes manières :
- Le nombre en haut de la fraction s'appelle le numérateur
- Le nombre en bas de la fraction s'appelle le dénominateur

Mais vous oubliez souvent que : $\frac{1}{3}$ représente **un** nombre.

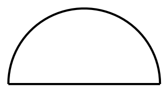
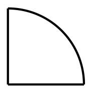
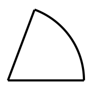
La définition de « un tiers » permet d'avoir la valeur de ce nombre :

Définition

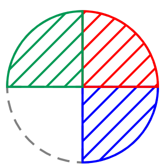
Un tiers $\left(\text{noté } \frac{1}{3}\right)$ *est le nombre qui vérifie :* $\boxed{3 \times \frac{1}{3} = 1}$

Il faut 3 fois un tiers pour faire 1, cela correspond à mettre les 3 parts ensemble pour former le disque entier. Le disque entier correspond au nombre 1.

De la même façon, on définit les nombres :

- $\frac{1}{2}$: il en faut 2 pour faire 1 $\left(2 \times \frac{1}{2} = 1\right)$ 
- $\frac{1}{4}$: il en faut 4 pour faire 1 $\left(4 \times \frac{1}{4} = 1\right)$ 
- $\frac{1}{5}$: il en faut 5 pour faire 1 $\left(5 \times \frac{1}{5} = 1\right)$ 
- ...

Dans ces définitions, on prend une part dans l'unité, mais on peut en prendre autant qu'on veut (quantité entière). Par exemple si je prends trois quarts :



$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

- Dans « **numér**ateur », il y a la même racine que **nombre** : c'est le numérateur qui indique combien il y a de parts.
- Dans « dé**nom**inateur », il y a **nom** : c'est le dénominateur qui indique la taille de la part (et donc son nom : demi, tiers, quart...).

Le numérateur sert à compter le nombre de parts.
Le dé**nom**inateur donne le nom de la fraction.

On peut donner une définition plus générale d'une fraction :

Définition

Le nombre $\frac{5}{3}$ *est la quantité qu'il faut prendre* 3 *fois pour obtenir* 5.

$$\boxed{3 \times \frac{5}{3} = 5}$$

De même on a les définitions :

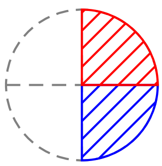
$\frac{7}{11}$ est le nombre qui vérifie l'égalité $11 \times \frac{7}{11} = 7$,
$\frac{15}{18}$ est le nombre qui vérifie l'égalité $18 \times \frac{15}{18} = 15$,
$\frac{9}{8}$ est le nombre qui vérifie l'égalité $8 \times \frac{9}{8} = 9$, etc.

Remarque

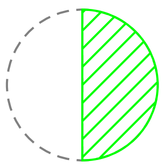
Les nombres de parts sont des nombres entiers. Une fraction est donc par définition le quotient de deux nombres ***entiers****.*

b. Fractions égales

Deux fractions différentes peuvent correspondre au même nombre :



$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$$

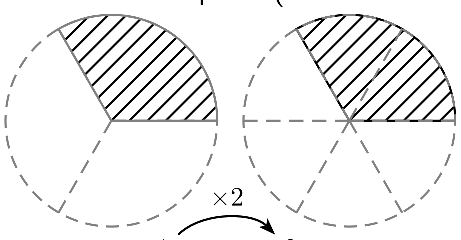


$$\frac{1}{2}$$

Dans les deux cas, on a hachuré la même surface, c'est donc la même quantité, le même nombre :

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

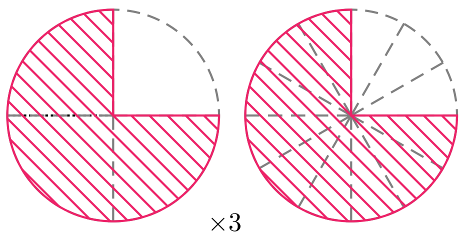
Quand on coupe en deux chaque part, on multiplie par deux le nombre total de parts (donc le dénominateur).



$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$

$\times 2$ $\times 2$

De même quand on les coupe en 3 :



$$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$$

$\times 3$ $\times 3$

Ainsi, quand on multiplie le dénominateur et le numérateur par le même nombre, on ne change pas la valeur de la fraction :

Théorème

Deux fractions sont égales lorsqu'on obtient le numérateur et le dénominateur de la première en multipliant (ou divisant) le numérateur ***et*** *le dénominateur de la deuxième par un* ***même nombre*** *(non nul).*

Exemples

$$\frac{2}{3}=\frac{2\times3}{3\times3}=\frac{6}{9}\ ;\quad \frac{1}{2}=\frac{1\times7}{2\times7}=\frac{7}{14}$$

$$\frac{5}{3}=\frac{5\times2}{3\times2}=\frac{10}{6}=\frac{5\times3}{3\times3}=\frac{15}{9}$$ *et réciproquement* $$\frac{15}{9}=\frac{5\times3}{3\times3}=\frac{10}{6}=\frac{5\times2}{3\times2}=\frac{5}{3}$$

÷2

÷2

Remarque

On utilise cette propriété pour ***simplifier*** *des fractions :* $\frac{56}{48}=\frac{7\times8}{6\times8}=\frac{7}{6}$

Exercice : Simplifier le plus possible les fractions suivantes :

- $\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$
- $\frac{81}{90}=\frac{9}{10}$
- $\frac{4}{18}=\frac{2}{9}$
- $\frac{16}{56}=\frac{8}{28}=\frac{4}{14}=\frac{2}{7}$

c. Fractions égales et proportionnalité

Propriété

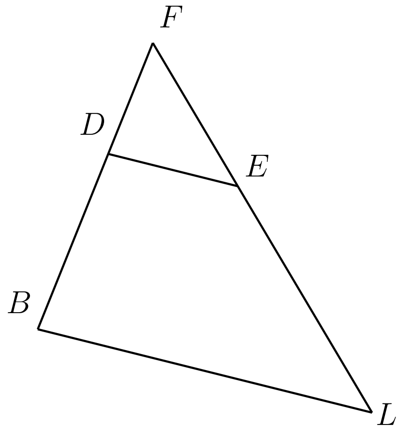
$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{3}{12}$ *est une autre façon d'écrire que*

1	2	3
3	6	12

est un tableau de proportionnalité.

Cette propriété est équivalente aux propriétés des opérations sur les colonnes dans un tableau de proportionnalité. La démonstration algébrique est faite tout à la fin de ce document.

Tout ce que vous connaissez sur les tableaux de proportionnalité peut donc vous servir quand vous avez des égalités de fractions [ou d'écriture fractionnaire (avec des valeurs décimales) voir IV -]. C'est très utile d'avoir ça en tête quand on cherche une valeur à l'aide du théorème de Thalès par exemple !



Affirmer que les égalités :

$$\frac{FD}{FB}=\frac{FE}{FL}=\frac{DE}{BL}$$

sont vraies, revient au même que de dire que le tableau suivant est un tableau de proportionnalité :

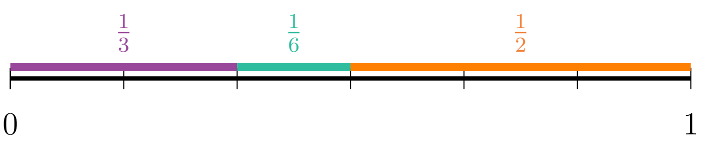
Côtés du petit triangle	FD	FE	DE
Côtés du grand triangle	FB	FL	BL

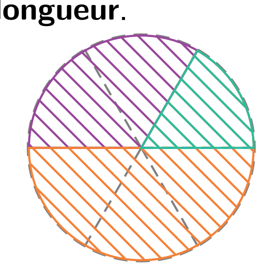
d. Placer des fractions sur un axe

Comme tous les autres nombres, les fractions peuvent se placer sur la droite graduée.

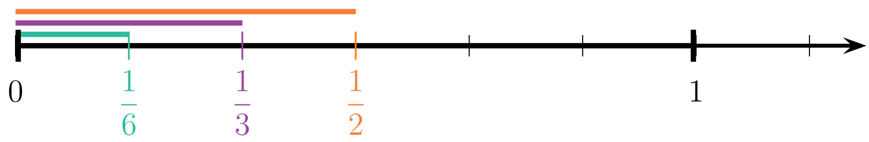
Le segment unité (un segment de longueur 1) a le même rôle que le cercle entier : il va être coupé en morceaux afin d'en prendre une fraction :

Les **fractions** sont alors représentées par des segments dont elles sont la **longueur**.

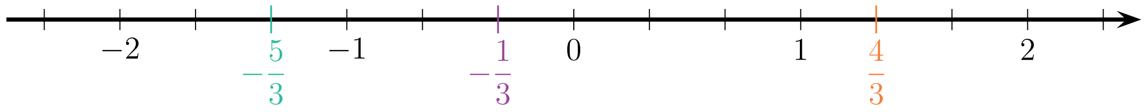




Pour les nombres positifs, l'abscisse d'un point est la distance entre ce point et l'origine de l'axe (graduation zéro), donc on va placer les abscisses fractionnaires ainsi :



Les nombres **négatifs** sont placés **à gauche de l'origine**.



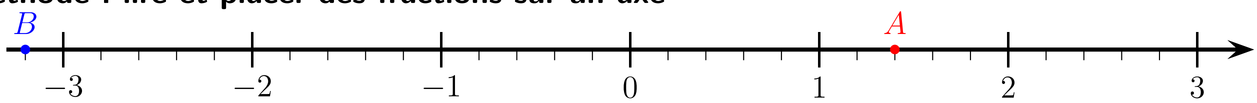
Remarque

On peut remarquer que $\frac{6}{3}$ *se place au même endroit que* 2*. Cela montre que* $\frac{6}{3} = 2$*.*

> *Si deux fractions différentes sont toutes les deux l'abscisse d'un même point, cela signifie que ces fractions sont égales.*

Par exemple $\frac{7}{3} = \frac{14}{6}$*.*

Méthode : lire et placer des fractions sur un axe



- On repère l'<u>origine</u> (là où est le zéro) et l'<u>unité</u> (là où est le 1) de l'axe.
- On compte en combien de segments il y a entre les deux (ici il y en a 5).
- <u>La quantité qui est 5 fois entre 0 et 1, c'est un cinquième</u> ($\frac{1}{5}$).
- On peut ainsi compter le nombre de cinquièmes pour placer n'importe quelle abscisse qui a un 5 au dénominateur (en bas de la fraction).

  Par exemple le point A placé sur l'axe ci-dessus est à 7 cinquièmes de l'origine, son abscisse est donc $A\left(\frac{7}{5}\right)$.
- Pour aller plus vite et ne pas se tromper en comptant sur de grandes quantités, on peut ne compter qu'à partir d'une graduation déjà marquée :

  Par exemple pour trouver l'abscisse du point B, je pars de -3, qui est à 15 cinquièmes à gauche de l'origine, et je compte à partir de là. C'est donc 16 cinquièmes : $B\left(-\frac{16}{5}\right)$.

II - Comparer des fractions

a. Cas particuliers

Mêmes dénominateurs

Deux fractions qui ont le même dénominateur « comptent » des « parts » de mêmes tailles. Ainsi, **plus le nombre de parts est grand, plus la fraction est grande**. Lorsqu'il y a le même dénominateur, on peut comparer les numérateurs :

$$\frac{3}{2} < \frac{5}{2} \qquad \frac{16}{13} > \frac{15}{13} \qquad \frac{150}{53} < \frac{151}{53}$$

Mêmes numérateurs

Le dénominateur est le nombre de « parts » qu'il y a dans l'unité, donc **plus le dénominateur est grand, plus la part est petite**. Lorsqu'il y a le même nombre de parts (même numérateur), on peut comparer les dénominateurs :

$$\frac{2}{3} > \frac{2}{5} \qquad \frac{13}{16} < \frac{13}{15} \qquad \frac{53}{150} > \frac{53}{151}$$

Comparer une fraction avec 1

Comparer une fraction avec 1 peut s'avérer utile. Or, on sait par exemple que $\dfrac{5}{5} = \dfrac{49}{49} = 1$ donc :

- Quand le numérateur et le dénominateur sont égaux, la fraction est égale à 1.
- Si on augmente le numérateur (en haut), alors la fraction devient plus grande que 1 (en effet $\frac{6}{5} = \frac{5+1}{5} = \frac{5}{5} + \frac{1}{5} = 1 + \frac{1}{5} > 1$).
- Si le dénominateur est plus grand que le numérateur, la fraction est plus petite que 1.

Exemple

a) $\dfrac{56}{45} > 1$ *car* $56 > 45$.

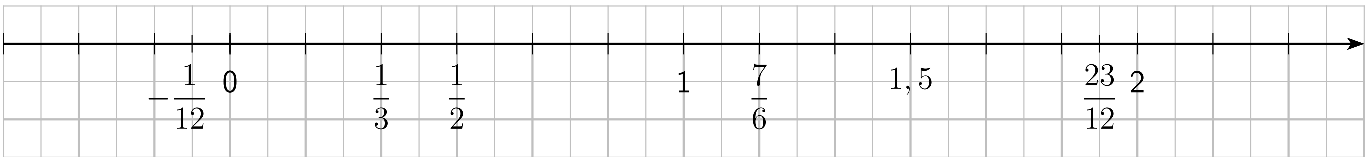
b) $\dfrac{121}{122} < 1$ *car* $121 < 122$.

b. Avec un axe gradué

Sur un axe gradué, les nombres sont rangés dans l'ordre croissant de gauche à droite.

Si un nombre est placé à gauche d'un autre sur un axe, c'est qu'il est plus petit.

Par exemple, on a placé les abscisses suivantes :



On peut donc affirmer que : $-\dfrac{1}{12} < 0 < \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{2} < 1 < \dfrac{7}{6} < 1,5 < \dfrac{23}{12} < 2$

c. Mettre au même dénominateur

Pour comparer deux fractions, on peut les mettre au même dénominateur grâce à la règle de simplification.

Exemple

Comparons les nombres $\dfrac{57}{64}$ *et* $\dfrac{7}{8}$.

On remarque que $64 = 8 \times 8$, *on choisit donc de modifier l'écriture de* $\dfrac{7}{8}$ *(sans changer sa valeur) :*

$$\frac{7}{8} = \frac{7 \times 8}{8 \times 8} = \frac{56}{64}$$

Maintenant qu'on sait que $\frac{7}{8}$ *correspond à* 56 *parts de « taille »* $\frac{1}{64}$*, on peut la comparer à* $\frac{57}{64}$*, qui contient un part de plus, et est donc plus grand :*

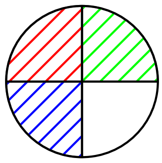
$$\frac{57}{64} > \frac{7}{8}$$

III - Opérations

a. Additionner ou soustraire des fractions

On sait déjà additionner certaines fractions :

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

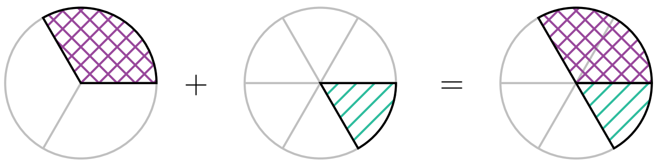


Il n'y a que les numérateurs qui s'ajoutent :

- dans **numér**ateur, il y a la même racine que **nombre** : c'est le numérateur qui indique combien il y a de portions
- dans dé**nom**inateur, il y a **nom** : c'est le dénominateur qui indique la taille de la portion.

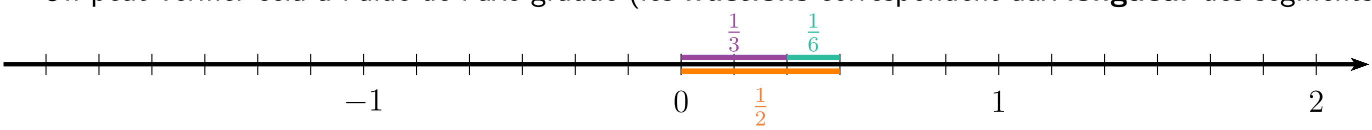
Le calcul $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}$ correspond à : 1 demi + 3 demis = 4 demis !

Et $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$?



Le dessin montre que la réponse est $\frac{1}{2}$.

On peut vérifier cela à l'aide de l'axe gradué (les **fractions** correspondent aux **longueur** des segments) :



Méthode

> Pour trouver le résultat d'une addition de fractions, nous allons utiliser le théorème qui permet de changer la fraction sans changer sa valeur.

$\frac{1}{3}$ peut aussi s'exprimer en sixièmes : $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ (cela revient à couper la part qui représente un tiers en deux).
On peut ensuite effectuer le calcul :

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{3 \times 1}{3 \times 2} = \frac{1}{2}$$

Exemples

a) $\frac{1}{3} + \frac{5}{6} = \frac{2}{6} + \frac{5}{6} = \frac{7}{6}$

b) $\frac{3}{5} + \frac{6}{10} = \frac{6}{10} + \frac{6}{10} = \frac{12}{10} = 1,2$

c) $\frac{8}{9} + \frac{2}{3} = \frac{8}{9} + \frac{6}{9} = \frac{14}{9}$

d) $\frac{1}{15} + \frac{7}{30} = \frac{2}{30} + \frac{7}{30} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10} = 0,3$

e) $\frac{6}{5} - \frac{6}{15} = \frac{18}{15} - \frac{6}{15} = \frac{12}{15} = \frac{3 \times 4}{3 \times 5} = \frac{4}{5}$

f) $\frac{3}{2} + \frac{5}{3} = \frac{3 \times 3}{2 \times 3} + \frac{5 \times 2}{3 \times 2} = \frac{9}{6} + \frac{10}{6} = \frac{19}{6}$

Il ne faut pas systématiquement multiplier les dénominateurs entre eux pour avoir un dénominateur commun : on peut multiplier par un nombre plus petit qui permet d'obtenir le plus petit multiple commun aux deux dénominateurs. Par exemple :

$\frac{2}{9}+\frac{7}{6}=\frac{2\times2}{9\times2}+\frac{7\times3}{6\times3}=\frac{4}{18}+\frac{21}{18}=\frac{25}{18}$ est plus simple que $\frac{2}{9}+\frac{7}{6}=\frac{2\times6}{9\times6}+\frac{7\times9}{6\times9}=\frac{12}{54}+\frac{63}{54}=\frac{75}{54}=\frac{25\times3}{18\times3}=\frac{25}{18}$

b. Multiplier des fractions

Nous savons déjà multiplier une fraction par un nombre entier : $5\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$.

Ceci est à mettre en relation avec le sens du numérateur : il **compte** le nombre de parts. Lorsqu'on multiplie par un nombre entier, on indique également combien on en prend (3 stylos c'est 3 fois un stylo...).

Autre exemple : $6\times\frac{3}{7}=\frac{6\times3}{7}=\frac{18}{7}$.

Et $\frac{3}{7}\times\frac{6}{5}$? $\left.\begin{array}{l}\frac{3}{7} \text{ est le nombre solution de } 7\times\ldots=3\\ \frac{6}{5} \text{ est le nombre solution de } 5\times\ldots=6\end{array}\right\}$ donc $(7\times5)\times\frac{3}{7}\times\frac{6}{5}=7\times\frac{3}{7}\times5\times\frac{6}{5}=3\times6$

donc $\left(\frac{3}{7}\times\frac{6}{5}\right)$ est la solution de $(7\times5)\times\ldots=3\times6$, qui correspond à la définition de la fraction $\frac{3\times6}{7\times5}$.

Nous venons de démontrer que $\frac{3}{7}\times\frac{6}{5}=\frac{3\times6}{7\times5}$, nous pouvons maintenant effectuer le calcul : $\frac{3\times6}{7\times5}=\frac{18}{35}$

Théorème

En multipliant deux fractions, on obtient une fraction dont le numérateur est le produit des deux numérateurs et le dénominateur est le produit des deux dénominateurs :

$$\frac{5}{7}\times\frac{13}{6}=\frac{5\times13}{7\times6}$$

Méthode : Vérifier qu'on ne peut pas simplifier AVANT d'effectuer un produit.

Exemple

$$\frac{9}{35}\times\frac{49}{72}=\frac{9\times49}{35\times72}=\frac{9\times7\times7}{5\times7\times9\times8}=\frac{7}{5\times8}=\frac{7}{40}$$

c. Diviser des fractions

Définition

*Deux nombres sont **inverses** l'un de l'autre lorsque leur produit fait 1.*

Exemple : $0,5\times2=1$ donc l'inverse de 2 est $0,5=\frac{1}{2}$ $\quad\frac{7}{5}\times\frac{5}{7}=1$ donc l'inverse de $\frac{7}{5}$ est $\frac{5}{7}$.

Remarque

En général, pour trouver l'inverse d'une fraction il suffit d'échanger le numérateur et le dénominateur.

Théorème

Diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse.

Exemple

$$\frac{\frac{8}{3}}{\frac{13}{9}} = \frac{8}{3} \times \frac{9}{13} = \frac{8 \times 9}{3 \times 13} = \frac{8 \times 3 \times 3}{3 \times 13} = \frac{8 \times 3}{13} = \frac{24}{13}$$

Remarque

$\dfrac{\frac{8}{3}}{\frac{13}{9}}$ *n'est pas une fraction : voir IV -*

IV - Fractions et écritures décimales

a. Écritures fractionnaires

L'opération à trou $5 \times \ldots = 3$ a pour solution la fraction $\dfrac{3}{5}$ (c'est la définition de cette fraction), mais c'est aussi le résultat du calcul $3 \div 5$, car la division est l'opération réciproque de la multiplication :

$$\begin{tikzcd} \ldots \arrow[r, bend left, "\times 5"] & 3 \arrow[l, bend left, "\div 5"] \end{tikzcd}$$

La barre de fraction peut donc remplacer le signe $\div$ d'une division, même pour des quotients de nombres décimaux. Le signe $\div$ n'est d'ailleurs plus du tout utilisé au lycée.

Une fraction est définie par le quotient de deux nombres **entiers**. Lorsqu'on écrit le quotient de deux nombres non entiers avec une barre de fraction, c'est ce qu'on appelle une **écriture fractionnaire**.

Exemples

- $\dfrac{5\,589}{740}$ *est une fraction car* $5\,589$ *et* 740 *sont des nombres entiers.*
- $\dfrac{2,5}{3}$ *n'est pas une fraction car* $2,5$ *est décimal, mais c'est une écriture fractionnaire.*
- *Le quotient* $3 \div (7-2)$ *peut aussi s'écrire* $\dfrac{3}{7-2}$.
- *Pour écrire le quotient* $3 \div 5 \div 9$ *avec une écriture fractionnaire, il faut faire bien attention à l'ordre dans lequel on effectue les opérations. Par exemple ici on doit effectuer les calculs de gauche à droite, donc cela donne :*

$$3 \div 5 \div 9 = (3 \div 5) \div 9 = \frac{\frac{3}{5}}{9}$$

Dans une écriture fractionnaire, il y a des « parenthèses invisibles » autour du numérateur et autour du dénominateur.

Exercice : Remplacer **tous** les symbole $\div$ par des barres de fractions.

a) $6 - 2 \div 8 = 6 - \dfrac{2}{8}$

b) $(6-2) \div 8 = \dfrac{6-2}{8}$

c) $6 \div (2 \div 8) = \dfrac{6}{\frac{2}{8}}$

d) $6 \div 2 + 8 = \dfrac{6}{2} + 8$

e) $6 \div (2+8) = \dfrac{6}{2+8}$

f) $(6-2) \div (8+3) = \dfrac{6-2}{8+3}$

b. Pourquoi utilise-t-on les fractions alors qu'on peut utiliser l'écriture décimale ?

Certaines fractions ont également une écriture décimale. Par exemple $2 \times 0,5 = 1$ donc $0,5 = \dfrac{1}{2}$, et on peut penser que la fraction est finalement une écriture compliquée par rapport à l'écriture décimale... mais en fait certains nombres ne peuvent pas s'écrire autrement qu'avec une fraction !

$$\begin{array}{rrrr|l}
 & 1 & & & 3 \\
- & 0 & & & \hline 0{,}3\,3\,3 \\
\hline & 1 & 0 & & \\
- & & 9 & & \\
\hline & & 1 & 0 & \\
- & & & 9 & \\
\hline & & & 1\,0 & \\
- & & & 9 & \\
\hline & & & 1 &
\end{array}$$

Par exemple la fraction $\dfrac{1}{3}$ correspond au quotient de 1 par 3, donc c'est le résultat de la division ci-contre.

Si on voulait donner une écriture décimale de $\dfrac{1}{3}$, on ne pourrait qu'en donner un **arrondi** :

$$\frac{1}{3} \approx 0,333333333333333...$$

Fractions qui ont une écriture décimale	Fractions qui n'ont pas d'écriture décimale
$\dfrac{1}{2} = 0,5$; $\dfrac{1}{5} = 0,2$	$\dfrac{2}{3} \approx 0,6666666667$
$\dfrac{1}{8} = 0,125$	$\dfrac{1}{11} \approx 0,090909090909$
$\dfrac{3}{8} = 0,375$; $\dfrac{8}{5} = 1,6$	$\dfrac{78}{113} \approx 0,6902654867$

Remarque

La calculatrice ne peut afficher qu'un certain nombre de décimales. Elle fait donc des ***arrondis****.*

Le résultat de $0,6902654867 \times 113$ *n'est pas* 78 *mais* $77,9999999971$ *; ce qui montre bien que* $0,6902654867$ *n'était pas la valeur exacte de* $\frac{78}{113}$.

Définition

Les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction sont appelés les nombres ***rationnels****.*

Remarques

- *Les nombres entiers sont tous rationnels puisqu'on peut toujours les écrire avec un 1 au dénominateur :*
  $5 = \dfrac{5}{1}$; $98 = \dfrac{98}{1}$,...
- *Les nombres décimaux sont également tous des nombres rationnels puisqu'on peut les écrire sous la forme d'une fraction décimale :*
  $5,6 = \dfrac{56}{10}$; $987,654\,321 = \dfrac{987\,654\,321}{1\,000\,000}$, ...
- *Il existe des nombres qui ne sont pas rationnels :* π, $\sqrt{2}$,...

Pour aller plus loin... Attention cette partie est très abstraite, soyez prêts !

Une fois qu'on a posé la définition des fractions, on peut se demander pourquoi est-ce que les calculs « fonctionnent » ainsi. Les mathématiciens n'ont pas décidé qu'il faudrait mettre au même dénominateur pour les additionner par exemple : ils ont simplement constaté que c'est comme cela que ça fonctionne. Pour s'en convaincre, ils font des ***démonstrations*** *: des raisonnements imparables qui permettent d'être sûr à 100% que les théorèmes sont vrais.*

V - Démonstrations de cours

Toutes les propriétés des fractions peuvent s'écrire sous forme de formules (où les lettres représentent des nombres entiers [1]) :

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} \qquad \frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \qquad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd} \qquad a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a} \qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Nous avons besoin pour cela de partir de la définition de n'importe quelle fraction :

Définition

$\frac{a}{b}$ *est le nombre tel que* $\boxed{b \times \frac{a}{b} = a}$ *(où a est un nombre entier et b un nombre entier non nul).*

On peut appliquer cette définition en remplaçant a et b par ce que l'on veut.
Par exemple pour la définition de $\frac{☻ + ♣}{★}$, c'est le nombre qui vérifie $★ \times \frac{☻ + ♣}{★} = ☻ + ♣$

Propriété 1 : $\mathbf{\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}}$ (simplification des fractions)

Par définition, $bc \times \frac{ac}{bc} = ac$. Comme pour les équations, on peut diviser chaque membre de cette égalité par c. On obtient :

$b \times \frac{ac}{bc} = a,$ ce qui correspond parfaitement à la définition de $\frac{a}{b}$.

Donc $\frac{ac}{bc}$ est égale à $\frac{a}{b}$. CQFD

Propriété 2 : $\mathbf{\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}}$ (somme avec dénominateur commun)

Par définition, $c \times \frac{a}{c} = a$ et $c \times \frac{b}{c} = b$. En additionnant ces deux égalités membre à membre on obtient :
$c \times \frac{a}{c} + c \times \frac{b}{c} = a + b$

Dans le membre de gauche, on peut mettre c en facteur : $c\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right) = a + b$

Ce qui est dans la parenthèse correspond donc parfaitement à la définition de la fraction $\frac{a+b}{c}$.

CQFD

1. Nombres entiers qui ne peuvent pas être égal à zéro dès qu'ils sont au dénominateur, puisqu'on ne peut pas diviser par zéro.

Propriété 3 : $\mathbf{\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}}$ (somme avec dénominateurs différents)

On commence par utiliser la propriété 1 :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{db}$$

Maintenant que les fractions sont au même dénominateur, on peut utiliser la propriété 2 :

$$\frac{ad}{bd} + \frac{cb}{db} = \frac{ad + cb}{bd}$$

CQFD

Propriété 4 : $\mathbf{\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}}$ (produits de fractions)

D'après la définition des fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, le produit $b \times \frac{a}{b} \times d \times \frac{c}{d} = a \times c$.

Dans le membre de gauche, on a que des produits, donc on peut changer l'ordre des facteurs :

$b \times d \times \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = bd \times \left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) = ac,$ ce qui correspond exactement à la définition de $\frac{ac}{bd}$

Cette propriété montre en particulier que $\boxed{\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}}$ *(propriété 4 bis)*

Propriété 5 : $\mathbf{\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}}$ (inverse d'une fraction)

Cette propriété correspond juste à la définition de l'inverse : $\frac{a}{b} \times \frac{1}{\frac{a}{b}} = 1$:

On sait que $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = 1$ grâce aux propriétés 4 puis 1, c'est bien la fraction $\frac{b}{a}$ qui est l'inverse de $\frac{a}{b}$.

Propriété 6 : $\mathbf{\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}}$ (quotient de fractions)

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{\frac{c}{d}} \quad \text{(propriété 4 bis)}$$

$$= \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} \quad \text{(propriété 5)}$$

CQFD

Égalité de fractions et proportionnalité

Dans ce paragraphe, les lettres a et c désignent des nombres quelconques et b, d et p des nombres non nuls (cela signifie qu'aucun d'eux ne peut être égal à zéro).

Propriété

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *est une autre façon d'écrire que* $\begin{array}{|c|c|}\hline a & c \\ \hline b & d \\ \hline\end{array}$ *est un tableau de proportionnalité.*

Preuve :

$\Rightarrow$ Supposons que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$.

Le tableau $\begin{array}{|c|c|}\hline a & c \\ \hline b & d \\ \hline\end{array}$ est un tableau de proportionnalité si on multiplie par la même nombre pour passer de b à a que pour passer de d à c.

Le premier nombre est $\dfrac{a}{b}$ car $b \times \dfrac{a}{b} = a$ et le deuxième est $\dfrac{c}{d}$ car $d \times \dfrac{c}{d} = c$. Ces deux nombres sont égaux : c'est donc le coefficient de proportionnalité du tableau.

$\Leftarrow$ Supposons que tableau $\begin{array}{|c|c|}\hline a & c \\ \hline b & d \\ \hline\end{array}$ est un tableau de proportionnalité, de coefficient de proportionnalité p : $b \times p = a$ et $d \times p = c$.

Alors les définitions des fractions $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$ montrent que $p = \dfrac{a}{b}$ et $p = \dfrac{c}{d}$ donc $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$.