Chapitre 3

Cas d'égalité des triangles

I - Introduction

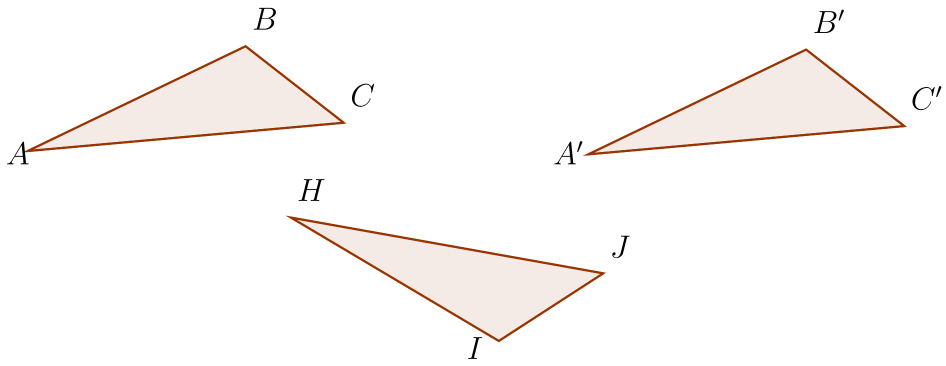
Les triangles peuvent être définis à l'aide d'indications sur leurs longueurs, ou sur leurs angles. Certains triangles se ressemblent, d'autres sont très différents, d'autres sont parfaitement identiques : ils ont les mêmes longueurs et les mêmes angles. C'est ce qu'on appelle des triangles isométriques :

Définition

Deux triangles sont dit **isométriques** *lorsqu'on peut les superposer parfaitement : si on les découpe, l'un recouvre parfaitement l'autre.*

Exemple

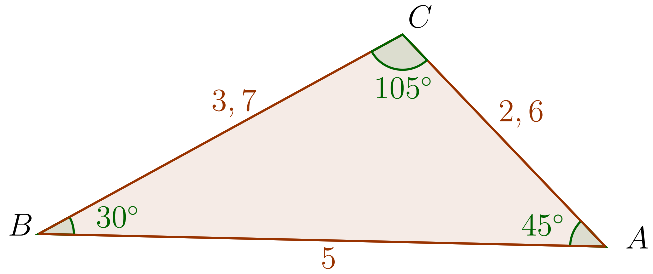
Les trois triangles ci-dessous sont isométriques :



Pour décrire un triangle bien particulier et que tout le monde ait bien des triangles isométriques, il va falloir donner des informations sur ce triangle : longueurs, angles,... Quelles sont les informations minimales que l'on peut donner sur un triangle afin que tout le monde dessine le même ?

Exemple

Prenons ce triangle :



Si j'enlève l'information "$\widehat{ABC} = 30°$", n'importe qui pourra tout de même tracer le même triangle sans utiliser le fait que cet angle vaut $30°$ et tout le monde aura le même triangle.

En effet, comme la sommes de trois angles vaut 180°, je n'ai pas besoin qu'on me dise que $\widehat{ABC} = 30°$ pour le savoir : je n'ai qu'à faire le calcul $180° - (105° + 45°) = 30°$ pour le savoir.

Cette information n'est donc pas nécéssaire, mais puis-je en enlever d'autres ?

Quelles sont les informations minimales nécéssaires pour définir un triangle ?

II - Les différents cas

a. Trois longueurs

iso est un préfixe qui vient du grec ancien (*ϊσος* signifie "égal")

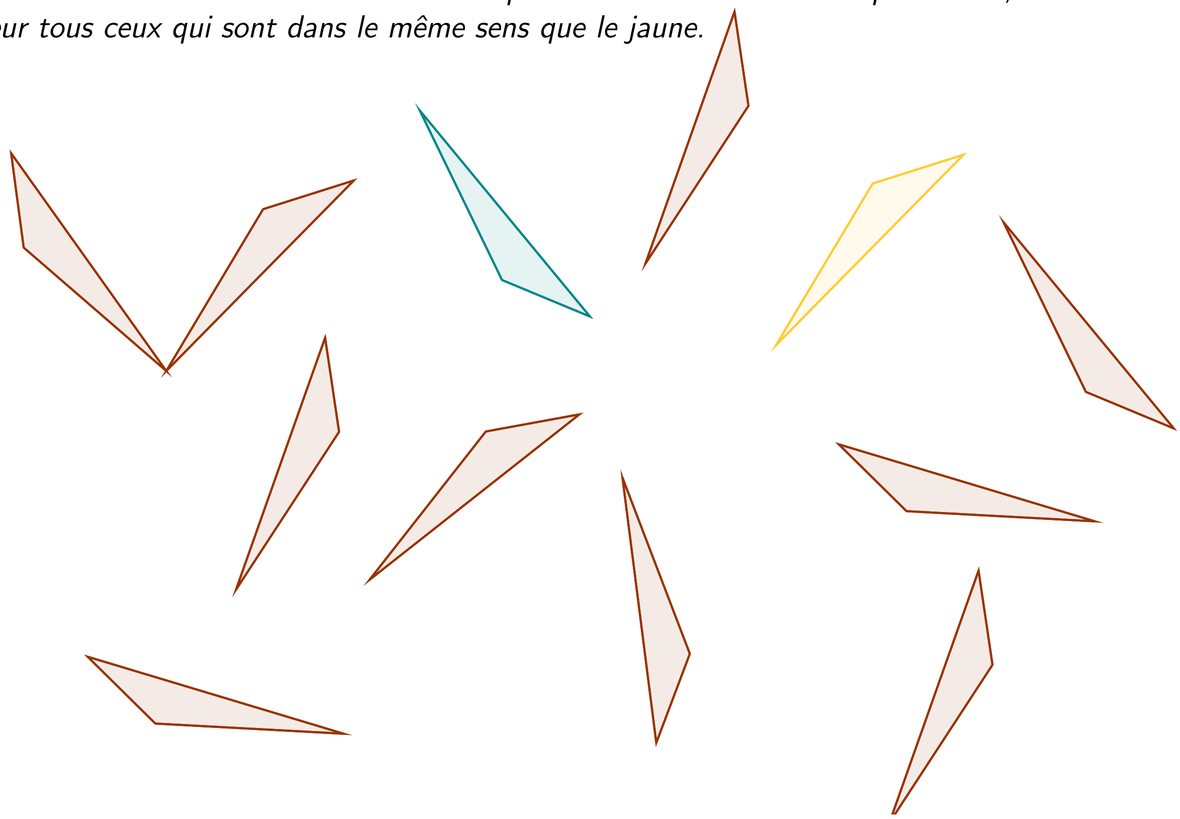
métrie a la même racine que l'unité "mètre" qui sert à mesurer les longueurs

C'est donc bien normal que deux triangles ayant les mêmes longueurs soient isométriques. On remarque simplement qu'il y a plusieurs cas d'isométries : parfois, un simple déplacement permet de superposer les deux triangles, alors que d'autres fois, il faudrait aussi le retourner en miroir pour qu'ils se superposent :

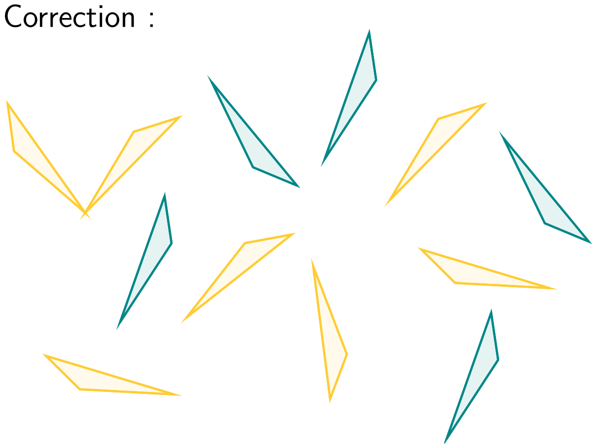
Exemple

Les triangles ci-dessous sont tous isométriques. Le bleu et le jaune ne sont pas dans le même sens : il faut en retourner un (en miroir) pour pouvoir le superposer à l'autre.

Coloriez d'une même couleur tous ceux qui sont dans le même sens que le bleu, et dans une autre couleur tous ceux qui sont dans le même sens que le jaune.



Correction :



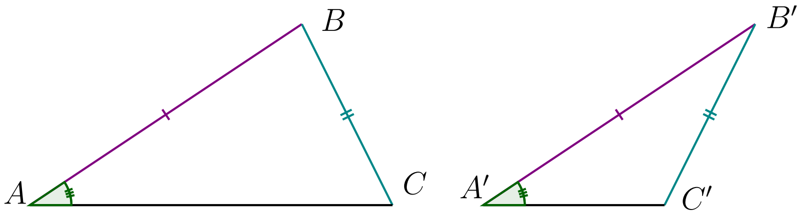
Théorème

Si deux triangles ont les côtés de mêmes mesures, alors ils sont isométriques.

b. Deux longueurs et un angle

Exemple

Tracer un triangle ABC tel que $AB = 3,6$ cm, $BC = 2,3$ cm et $\widehat{BAC} = 34°$.
Toute la classe obtient-elle des triangles isométriques ?



⚠ Les deux triangles ci-dessus ont deux côtés de mêmes longueurs et un angle de même mesure, mais ils ne sont pas isométriques.

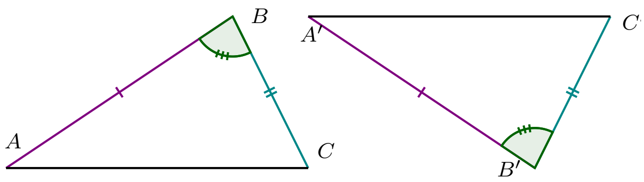
Pour que les triangles soient bien isométrique, il faut que l'angle dont on conait la valeur soit placé entre les deux côtés dont on connait la valeur.

Théorème

Si deux triangles ont :

- *deux côtés deux à deux de mêmes mesures,*
- *les angles entre ces deux côtés de mêmes longueurs.*

alors ils sont isométriques.



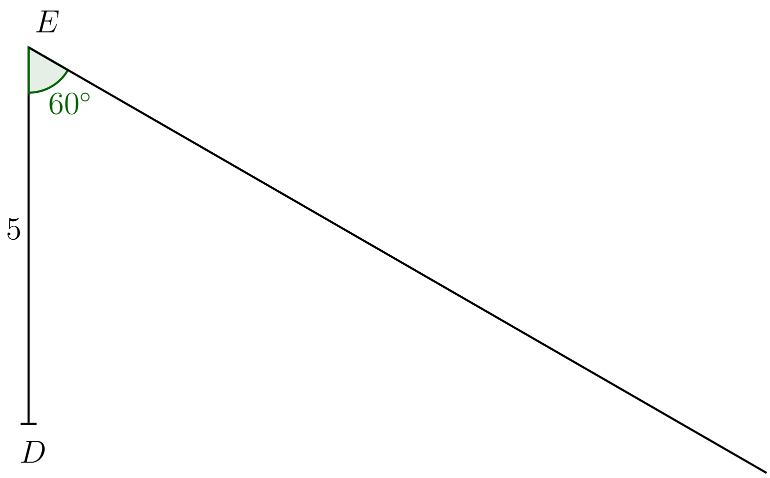
c. Une longueur et deux angles

Lorsqu'on connait deux angles d'un triangle, on peut automatiquement calculer le troisième, car la somme des ces trois angles vaut 180°.

Exemple

Tracer le triangle DEF tel que $DE = 5$ cm, $\widehat{DEF} = 60°$ et $\widehat{DFE} = 30°$.

Je peux commencer à tracer le segement $[DE]$ en mesurant 5 cm, puis je place mon rapporteur sur le point E pour mesure un angle de 60° :

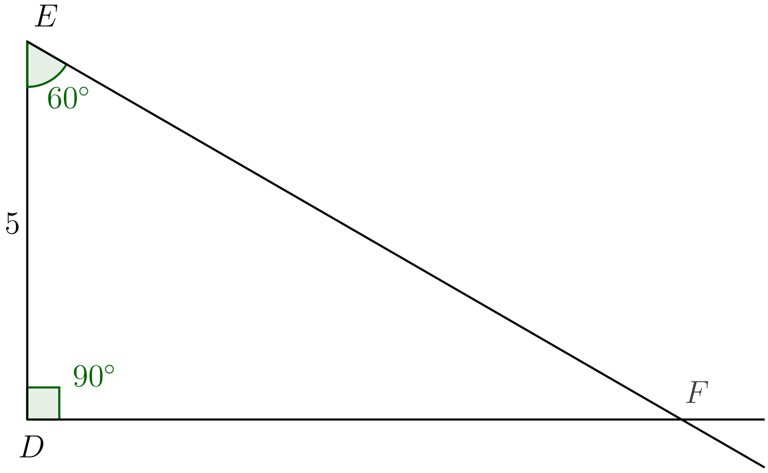


Et je suis ensuite bloqué : je ne peux pas mettre mon rapporteur sur le point E pour mesurer 30°car je ne sais pas où est le point E !

Pour me débloquer, je vais calculer l'angle $\widehat{EDF}$:

$\widehat{DEF} + \widehat{DFE} + \widehat{EDF} = 60° + 30° + ? = 180°$. Donc $90° + ? = 180°$, donc $? = 90°$!

Je n'ai donc plus qu'à prendre mon équerre (ou mon rapporteur) pour tracer la demie-droite $[EF)$:

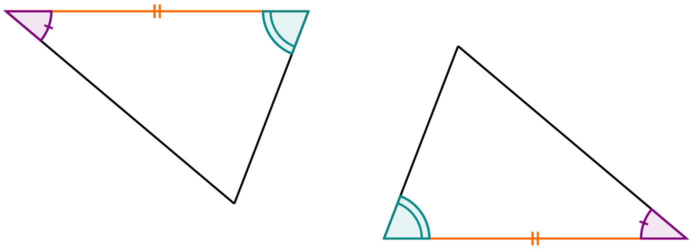


Théorème

Si deux triangles ont :

- *deux angles de mêmes mesures*
- *des côtés positionnés entre deux angles homologues* de même longueur.*

alors ils sont isométriques.



* Lorsqu'on superpose deux triangles isométriques, chaque partie d'un triangle recouvre sa partie **homologue** sur l'autre triangle. On pourrait dire que c'est l'angle "qui va avec".

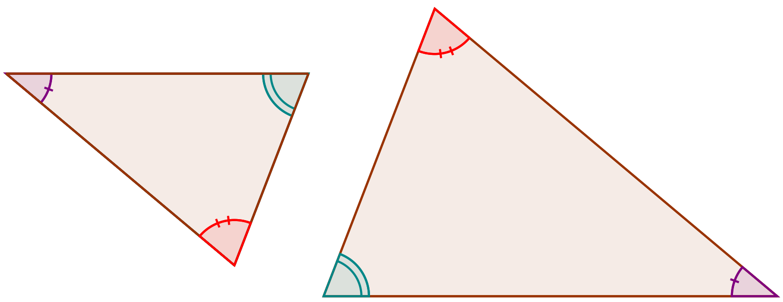
d. Trois angles

Si on connait deux angles, on connait le troixième... donc il manque juste une information de longueur par rapport au cas précédent.

Remarque

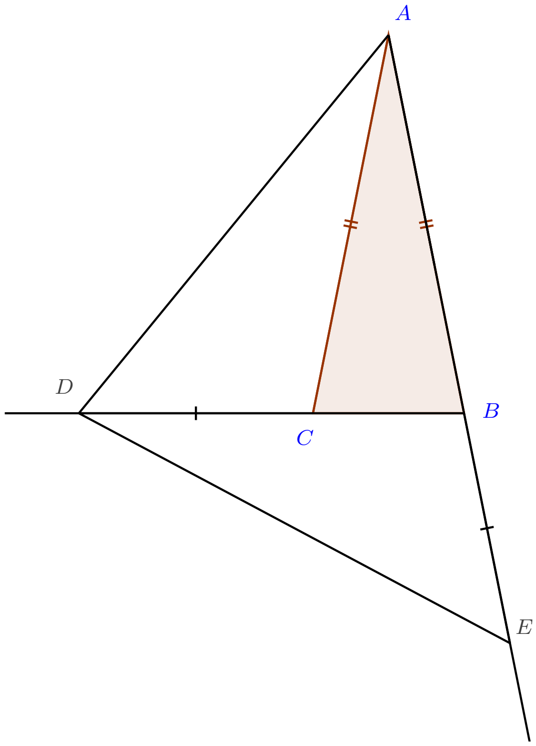
Dexu triangles dont les angles sont égaux deux à deux ne sont pas forcément isométriques : ils ont la même forme, mais ne sont pas forcément de la même taille.

C'est ce qu'on appelle des triangles **semblables**. *Vous verrez cela plus en détails en 3ème.*



III - Exemple d'utilisation

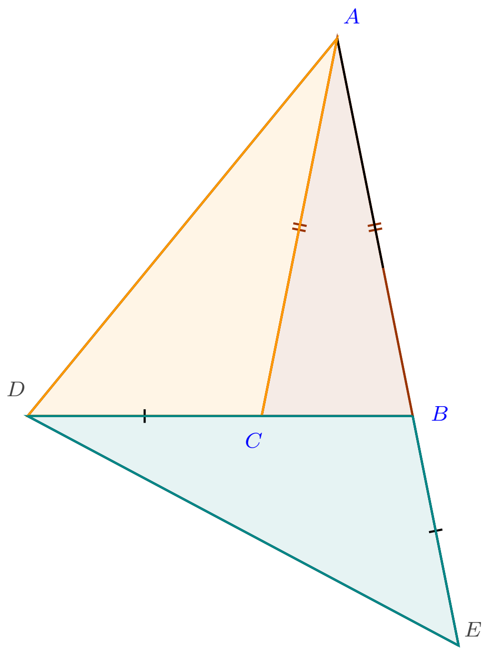
Soit ABC un triangle isocèle avec $AB = AC > BC$. On place un point D sur la demi-droite $[BC)$ et un point E sur la demi-droite $[AB)$ de telle sorte qu'on ait $BE = CD = AB - BC$. Que peut-on dire du triangle ADE ?



On commence par faire une figure en prenant bien soin de coder toutes les informations qu'il est possible de coder.
On peut garder en tête l'information qu'on n'a pas pu coder : $BE = CD = AB - BC$

En observant la figure, on peut remarquer que les triangles ADC et DBE semblent isométriques... le codage $DE = BE$ nous conforte dans cette intuition... Donc si cette intuition est exacte, le triangle ADE est isocèle en D.
Maintenant il faut chercher dans l'énoncé les informations qui vont nous permettre de prouver que les deux triangles sont effectivement isométriques.

Prouver, ça veut dire montrer pourquoi on est sûr à 100% que c'est vrai.

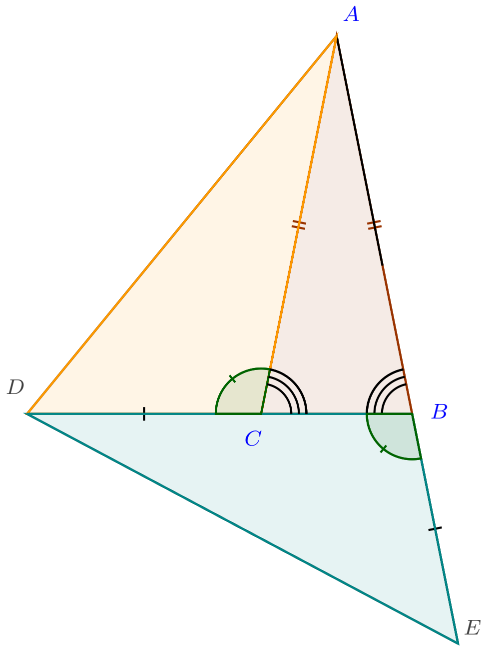


Je sais que $BE = CD = AB - BC$, donc DB, qui est égale à $DC + CB$ puisque D, C et B sont alignés, vaut : $DB = CD + CB = AB - BC + CB = AB$, mais $AB = AC$ car le triangle ABC est isocèle en A.

On a donc déjà deux égalités de longueurs : $DB = AC$ et $DC = BE$.

Pour montrer que les deux triangle sont isométriques, il faut donc :

- soit prouver que $AD = DE$ (mais ça c'est justement ce qu'on cherche à prouver...)
- soit prouver que $\widehat{ACD} = \widehat{DBE}$... et là on peut avoir une piste grace à l'alignement des points D, C et B : $\widehat{DCB}$ est un angle plat.



Grâce à l'alignement, on sait que $\widehat{BCA} + \widehat{ACD} = 180°$ et que $\widehat{ABC} + \widehat{CBE} = 180°$;
mais comme le triangle ABC est isocèle en A, ses angles à la base $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ABC}$ sont égaux.
On a donc $\widehat{BCA} + \cancel{\widehat{ACD}} = \cancel{\widehat{ABC}} + \widehat{CBE}$,

donc $\widehat{BCA} = \widehat{CBE}$.

On a montré que :

- $AC = DB$,
- $BC = CD$ et que
- $\widehat{BCA} = \widehat{CBE}$.

donc ils sont isométriques.
Donc $AD = DE$ et donc le triangle ADE est bien isocèle en E.

Remarque : *Cette première démonstration est extrêment longue car je tenais à expliquer vraiment à fond tout ce qui se passe dans la tête d'un mathématicien en herbe qui répond à cet exercice en justifiant parfaitement. Suit une version beaucoup plus concise, qui conviendrait parfaitement aussi.*

Correction concise

⋆ *On sait que* $\boxed{DC = BE}$.

⋆ $DB = DC + CB = AB - BC + CB = AB$ *et* $AB = AC$ *(car ABC isocèle) donc* $\boxed{DB = AC}$.

⋆ $\widehat{BCA} + \widehat{ACD} = 180° = \widehat{ABC} + \widehat{CBE}$ *et* $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ *(car* ABC *est isocèle en* A*)*

donc $\boxed{\widehat{ACD} = \widehat{CBE}}$

De ces trois résultats, il vient que les triangles ADC *et* DEB *sont isométriques. On en déduit que* $AD = DE$ *et donc que* **le triangle ADE est isocèle en D**.