Chapitre 8

Équations

Dans tout ce chapitre, il est important d'écrire les x arrondis pour les différancier du signe $\times$!

I - Rappel calcul littéral

Nous avons vu comment simplifier certaines expressions littérales :

- ⋆ $x \times 5$ s'écrit simplement $5x$ (le nombre devant, le signe $\times$ sous-entendu)
- ⋆ $6x + 7x = 13x$ (on compte combien on a de x)
- ⋆ on ne peut pas simplifier $2x + 3y$ ou encore $2x^2 + 4x$ (on ne peut pas effectuer l'opération "2 stylos plus 3 chaises")

II - Égalités / Identités

On peut écrire un signe égal entre deux expressions littérales pour plusieurs raisons :

- pour donner une formule (en physique, en géométrie,...)

  Exemple : $U = RI$ donne la tension en fonction de la résistance et l'intensité du courant électrique.

- quand les deux expressions donnent toujours des résultats égaux, quelque soit la valeur par laquelle on remplace l'inconnue : c'est une **identité**

  Exemples d'indentités : $x + x = 2x$; $x - x = 0$; $x^2 = x \times x$; $\dfrac{x^2}{x} = x$ *(si $x \neq 0$)*

- les deux expressions sont parfois égales, mais parfois pas. On écrit alors un signe égal pour expliquer qu'on cherche la ou les valeurs de x qui rendent l'égalité vraie. C'est une **équation**.

Définition

Deux expressions (littérales ou non) séparées par un signe égal forment une **égalité**. *L'expression à gauche du signe égal s'appelle* **le membre de gauche**, *et celle à droite s'appelle* **le membre de droite**.

$$\underbrace{4x - 2}_{\text{membre de gauche}} = \underbrace{8 - 7x}_{\text{membre de droite}}$$

Une égalité peut être vraie, fausse ou parfois vraie et parfois fausse.

Par exemple $5x + 2 = 0$ n'est pas vraie si $x = 0$ (car $5 \times 0 + 2 = 2 \neq 0$)
mais par contre si $x = -0,4$ alors $5 \times (-0,4) + 2 = -2 + 2 = 0$ donc elle est vraie.

Ce genre d'égalité s'appelle une **équation**

Définition

- ⋆ *Une* **équation** *est une égalité qui contient une inconnue (souvent notée x), dont on cherche à déterminer la valeur.**

  Ex : $5x - 3 = 2$ est une équation.

- ⋆ **Résoudre une équation** *c'est trouver la (ou les) valeur(s) de x qui rendent l'égalité vraie.*

  Ex : Dans l'équation $5x - 3 = 2$, si je remplace x par 1, j'obtiens : $5 \times 1 - 3 = 5 - 3 = 2$, donc la solution de l'équation est $x = 1$.

*Il existe des équations à plusieurs inconnues, mais nous n'en ferons pas cette année.

III - Vérifier qu'une solution est exacte

Définition

Dire qu'une valeur est **solution** *d'une équation signifie que si on remplace l'inconnue par cette valeur, alors l'égalité est vraie.*

Exemple

On considère l'équation

$$8x^2 + 6 - x = 48x$$

1. *Le nombre 6 est-il solution de cette équation ?*
2. *Le nombre -2 est-il solution de cette équation ?*
3. *Le nombre $\dfrac{1}{8}$ est-il solution de cette équation ?*

Solution :

1. *Oui 6 est solution : $8 \times 6^2 + 6 - 6 = 288$ et $48 \times 6 = 288$*
2. *Non -2 n'est pas solution : $8 \times (-2)^2 + 6 - (-2) = 40$ et $48 \times (-2) = -96$*
3. *Oui $\dfrac{1}{8}$ est solution : $8 \times \left(\dfrac{1}{8}\right)^2 + 6 - \dfrac{1}{8} = 6$ et $48 \times \dfrac{1}{8} = 6$*

IV - Résolution d'équation : méthode

Définition

Résoudre une équation, *c'est trouver la ou les valeurs de l'inconnue qui rendent l'égalité vraie.*

Il faut donc transformer l'égalité de départ en une égalité du type : $x =$ valeur numérique.

Pour transformer une égalité sans changer la ou les valeurs pour laquelle elle est vraie, on peut effectuer la **même** opération sur chacun des deux membres de l'équation.

$$\begin{aligned} 5 &= 5 \\ 5{\color{red}\times 3} &= 5{\color{red}\times 3} \\ 15 &= 15 \end{aligned}$$

L'égalité de départ reste vraie si elle était vraie (et fausse si elle était fausse). Donc s'il y a une inconnue, la (ou les) valeur(s) qui rend(ent) l'égalité vraie reste(ent) la (ou les) même(s) :

$$x^2 = 9 \text{ est vraie pour } x = 3 \text{ et pour } x = -3$$
$$3x^2 = 27 \text{ est vraie pour } x = 3 \text{ et pour } x = -3$$

Dans la pratique, on va choisir judicieusement les opérations effectuées de manière à simplifier l'équation jusqu'à obtenir $x = \dots$.

Voyons la méthode appliquée à la résolution de l'équation :

$$5x + 2 = 1 - x$$

★ Première étape : faire en sorte que l'inconnue ne soit présente que dans le membre de gauche :

$$\begin{aligned} 5x + 2 &= 1 - x \\ 5x + 2 + x &= 1 \end{aligned}$$

À chaque étape, on peut simplifier en faisant du calcul littéral :

$$\begin{aligned} 5x + 2 + x &= 1 \\ 6x + 2 &= 1 \end{aligned}$$

★ Deuxième étape : on isole l'inconnue (de manière à ce qu'il ne reste que x dans le membre de gauche) :

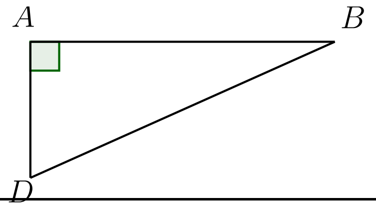
$$\begin{aligned} 6x + 2 &= 1 \\ 6x + 2 - 2 &= 1 - 2 \\ 6x &= -1 \\ x &= \frac{-1}{6} \end{aligned}$$

On peut vérifier sa solution en remplaçant x par la valeur trouvée dans chaque membre de l'égalité de départ :

Si $x = \frac{-1}{6}$, alors $5x + 2 = 5 \times \frac{-1}{6} + 2 = \frac{7}{6}$ et $1 - x = 1 - \frac{-1}{6} = 1 + \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$

V - Application : théorème de Pythagore

Problème



Sachant que $DA = 6,3$ cm et $DB = 6,8$ cm, calculer l'arrondi au centième de centimètre de AB. **Justifier !**

Mesurer n'est pas suffisant pour répondre à la question car la précision d'une mesure n'est fiable qu'au millimètre. Pour avoir la précision requise, il faut utiliser le théorème de Pythagore.

Dans le triangle ABD, rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore :

$$DB^2 = AD^2 + AB^2$$

Remplaçons dans cette égalité les valeurs que l'on connait :

$$6,8^2 = 6,3^2 + AB^2$$

Puis calculons les valeurs des carrés :

$$46,24 = 39,69 + AB^2$$

On se retrouve alors avec une équation dans laquelle l'inconnue est AB (on peut remplacer AB par la lettre x, mais on peut aussi laisser AB).

Résolvons cette équation :

$$\begin{array}{rrcll} & 46,24 &=& 39,69 + AB^2 & \\ -39,69 & & & & -39,69 \\ & 46,24 - 39,69 &=& AB^2 & \\ & 6,55 &=& AB^2 & \\ \sqrt{\cdots} & & & & \sqrt{\cdots} \\ & \sqrt{6,55} &=& AB & \end{array}$$

En utilisant la touche $\sqrt{\blacksquare}$ de la calulatrice, on trouve l'arrondi au centième :
$AB \approx 2,56$ cm