Chapitre 9

Puissances de 10

Nous connaissons déjà la notation x^2 (x au carré) qui signifie $x \times x$. Petu être même avez-vous déjà recontré "x au cube" : $x^3 = x \times x \times x$... mais cette notation se généralise. C'est ce qu'on appelle les puissances. Nous allons dans ce chapitre voir uniquement les puissances de 10.

I - Puissances de 10

Définition

- $10^1 = 10$ — 10^1 *se lit "10 puissance 1"*
- $10^2 = 10 \times 10 = 100$ — 10^2 *se lit "10 au carré"*
- $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1\,000$ — 10^3 *se lit "10 au cube"*
- $10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000$ — 10^4 *se lit "10 puissance 4"*
- $10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100\,000$ — 10^5 *se lit "10 puissance 5"*
- ... — ...

On peut donner une définition plus générale de 10^n où n est un nombre entier positif :

Définition

$$10^n = \underbrace{10 \times 10 \times 10 \times ... \times 10 \times 10}_{n \text{ fois}}$$

♦ *Exercices n°19, 21, 23 et 27 page 82*

Pour pouvoir faire des calculs avec des puissances de 10, il faut les transformer (soit au brouillon, soit dans sa tête) en produits de 10.

Exemples

★ $10^5 \times 10^2 = \underbrace{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}_{5 \text{ fois}} \times \underbrace{10 \times 10}_{2 \text{ fois}} = 10^7$

★ $\dfrac{10^6}{10^4} = \dfrac{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}{10 \times 10 \times 10 \times 10} = 10^2$, *car un 10 au numérateur se simplifie avec un 10 au dénominateur.*

Remarque

La puissance de 10 indique le nombre de 0 d'un nombre (et donc son **ordre de grandeur***)*

Autrement dit, l'écriture décimale de 10^n est un 1 suivit de n zéros.

II - Puissances négatives

Définition

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1$$

Sur le même principe

- $10^{-2} = \dfrac{1}{10^2} = 0,01$
- $10^{-3} = \dfrac{1}{10^3} = 0,001$
- $10^{-4} = \dfrac{1}{10^4} = 0,000\,1$
- $10^{-5} = \dfrac{1}{10^5} = 0,000\,01$
- $10^{-6} = \dfrac{1}{10^6} = 0,000\,001$
- ...

La puissance négative indique le nombre de fois qu'il faudrait déplacer la virgule à droite pour obtenir 1.

Les puissances de 10 correspondent au tableau que vous avez déjà appris :

Milliard	Million	Millier	Centaine	Dizaine	Unité	Dixième	Centième	Millième
10^9	10^6	10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}

On peut bien sûr donner aussi les noms de :

- 10^4 c'est une dizaine de millier
- 10^5 c'est une centaine de millier
- 10^7 c'est une dizaine de million
- 10^{10} c'est une dizaine de milliard
- etc.

Remarques

★ *Une puissance de* 10 *négative s'écrit avec un 1 précédé de autant de zéros qu'indique la puissance.*
★ $10^{-5} = 0,00001$ *est un nombre* **positif**. *Le signe* $-$ *dans la puissance est juste là pour indiquer que cette puissance de* 10 *est au dénominateur d'une fraction.*

Exemple

$10^{-3} \times 10^4 = \dfrac{10^4}{10^3} = \dfrac{10 \times 10 \times 10 \times 10}{10 \times 10 \times 10} = 10$, *car un 10 en haut se simplifie avec un 10 en bas.*

$10^2 \times 10^{-4} = \dfrac{10^2}{10^4} = \dfrac{10 \times 10}{10 \times 10 \times 10 \times 10} = 10^{-2}$

⧫ *Exercices n°20, 22, 24, 25 et 28 page 82*

III - Notation scientifique

♦ Activité 4 page 77

1. Ces écritures ne sont **pas pratiques** car :
   - elles sont très longues à écrire
   - pour les recopier, il faudrait compter le nombre de zéros sans se tromper
2. a)Masse de la Terre : $5\,972 \times 10^{21}$ car il y a 21 zéros derrière $5\,972$.

   b) $$\begin{aligned} 5\,972 \times 10^{21} &= 59\,720 \times 10^{20}\,\text{kg} \\ &= 597,2 \times 10^{22} \\ &= 59,72 \times 10^{23} \\ &= 5,972 \times 10^{24} \end{aligned}$$
3. Masse d'une molécule d'eau : 3×10^{-23} g

   Autres façons d'écrire ce nombre : $30 \times 10^{-24} = 0,3 \times 10^{-22} = 0,03 \times 10^{-21} = 300 \times 10^{-25}$ =etc.
4. Masse de la Terre en notation scientifique : $5,972 \times 10^{24}$ kg

   Masse d'une molécule d'eau en notation scientifique : 3×10^{-23} g

Pourquoi avoir choisi une telle écriture ?

Prenons par exemple le nombre : $\underbrace{5}_{\text{milliards}}\ \underbrace{737}_{\text{millions}}\ \underbrace{109}_{\text{milliers}}\ \underbrace{248}_{\text{centaines}}$

Le chiffre 5 représente le nombre de milliards, mais pour s'en rendre compte, il faut compter le nombre de chiffres dans le nombre (ici c'est relativement facile car le nombre est bien écrit avec des espaces tous les 3 chiffres, mais imaginez s'il ne l'était pas !)

Alors qu'avec l'écriture $5,737\,109\,248 \times 10^9$, on sait tout de suite que 10^9 correspond à un milliard.

Autre avantage : il est plus court d'écrire $8,7 \times 10^{12}$ que $8\,700\,000\,000\,000$!

Exemple

Au lieu d'écrire que le soleil est à environ $150\,000\,000$ km, on va écrire $1,5 \times 10^8$ km.
Au lieu d'écrire que la taille du virus du sida est d'environ $0,000\,145$ mm, on écrira $1,45 \times 10^{-4}$ mm

C'est ce qu'on appelle l'écriture scientifique.

Définition

L'écriture scientifique d'un nombre est de la forme :

$$a \times 10^n$$

$0 \leqslant a < 10$ — n *est un nombre entier relatif*

Remarque

Le nombre a dans l'écriture scientifique a donc toujours un seul chiffre devant la virgule qui n'est jamais un zéro. Il ne peut pas avoir de dizaine.

♦ *Exercices n°41 et 42 page 84*

IV - Préfixes de Nano à Giga

Cette notation permet également de faire des conversions facilement (en tout cas plus facilement qu'avec les tableaux de conversions que vous avez vu en primaire !). Notamment en convertissant tout en l'unité de base (suivant le cas : mètre, gramme, etc)

Exemple

Quelle longueur est la plus grande : $5,4 \times 10^5$ cm ou $5,4 \times 10^{-4}$ km ?

- $5,4 \times 10^5$ *cm* $= 5,4 \times 10^5 \times 10^{-2}$ *m* $= 5,4 \times 10^3$ *m*
- $5,4 \times 10^{-4}$ *km* $= 5,4 \times 10^{-4} \times 10^3$ *m* $= 5,4 \times 10^{-1}$ *m*

Pour utiliser cette technique, il faut connaitre **par coeur** *les correspondances entre préfixes et puissances de 10 (données dans le tableau suivant).*

Nom du préfixe	**notation**	**puissance de 10**
giga	G	10^9
méga	M	10^6
kilo	k	10^3
hecto	h	10^2
deca	da	10^1
déci	d	10^{-1}
centi	c	10^{-2}
milli	m	10^{-3}
micro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}