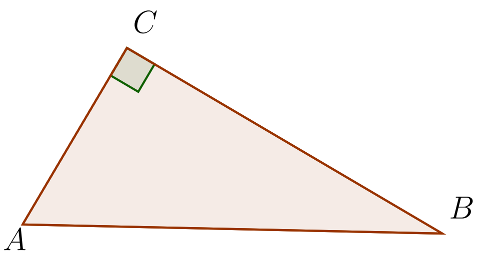
Chapitre 12

Réciproque de Pythagore

Nous avons vu en début d'année une propriété caractéristique des triangles rectangles : pour ces triangles (et seulement pour ces triangles), l'égalité de Pythagore est vraie.

Théorème (de Pythagore)



$\Leftrightarrow$ $AB^2 = AC^2 + CB^2$

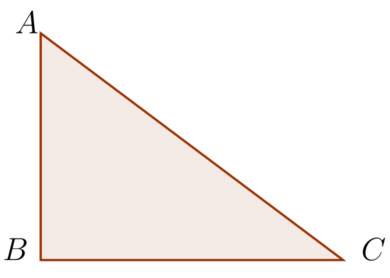
Jusqu'à maintenant, on s'est servi de la flèche dans le sens gauche vers la droite : Si un triangle est rectangle, alors l'égalité de Pyhtagore est vraie.

Nous allons maintenant voir comment utiliser l'autre sens de la flèche : Si l'égalité de Pythagore est vraie, alors le triangle est rectangle. C'est ce qu'on appelle la **réciproque** du théorème de Pythagore.

Exemple

1. *Tracer en vraie grandeur un triangle ABC dont les côtés mesurent : 3 cm pour AB, 4 cm pour BC et 5 cm pour AC.*
2. *Ce triangle est-il rectangle ?*

1)



2) A l'aide de mon équerre, je remarque que l'angle en B semble être droit. Mais cela n'est qu'une conjecture : je ne peux pas affirmer avec certitude que la valeur de l'angle est bien $90°$, ça pourrait être $89,99°$ou encore $90,001°$. Pour pouvoir affirmer que l'angle est parfaitement droit, il faut que je le **démontre** à l'aide d'une propriété mathématique ou d'un théorème.

Dans le triangle ABC, le côté le plus long est $[AC]$ (donc si ce triangle était rectangle, $[AC]$ serait l'hypoténuse). On calcule donc :

D'un côté :	De l'autre côté :
$AC^2 = 5^2 = 25$	$AB^2 + BC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$

On trouve le même résultat, donc on peut affirmer que $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Comme cette égalité est vraie, je peux affirmer grâce à la réciproque du théorème de Pythagore que le triangle ABC est rectangle en B.

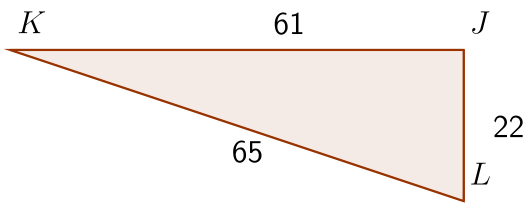
Exercices 32 et 34 page 204

Remarque

Mais que se passe-t-il si l'égalité n'est pas vraie ?

Si l'égalité n'est pas vraie, le triangle n'est bien sûr pas rectangle mais ce n'est pas la réciproque du théorème de Pythagore qui me permet de l'affirmer, c'est sa **contraposée**.

Ce mot est hors programme, mais si ça intéresse certains d'entre vous, je vous mets le lien d'un vidéo qui explique très bien ce qu'est la contraposée d'une implication (l'implication c'est ce qui permet de faire des déductions, par exemple « si... alors ... »).



Le côté le plus long est $KL = 65$, donc si le triangle était rectangle, ce serait forcément en J. Calculons :

d'une part :	d'autre part :
$KL^2 = 65^2$ $= 4\,225$	$KJ^2 + JL^2 = 61^2 + 22^2$ $= 3\,721 + 484$ $= 4\,205$

On remarque que l'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée, or, si le triangle était rectangle, le théorème de Pythagore affirme qu'elle devrait être vraie ! Le triangle n'est donc pas rectangle en J, et donc pas rectangle du tout.

Exercices n°31 et 30 page 204 et n°36 page 205