Chapitre 6

Multiplications de nombres relatifs**I - Produit d'un nombre positif par un négatif**

On peut trouver tout seul comment multiplier un nombre négatif par un nombre entier positif :

$$2 \times (-3) = -3 + (-3) = -6$$

$$3 \times (-3) = -3 + (-3) + (-3) = -9$$

$$4 \times (-3) = -3 + (-3) + (-3) + (-3) = -12$$

On s'aperçoit que quand on multiplie un nombre négatif par un nombre positif, le résultat est négatif.

Exercice

$$2 \times (-1) = \dots \quad 5 \times (-9) = \dots \quad -4 \times 8 = \dots \quad 8 \times (-7) = \dots \quad -11 \times 7 = \dots$$

Cette règle est toujours vraie pour les nombres décimaux.

Exemple

$$0,1 \times (-5) = -0,5$$

$$-0,5 \times 12 = -6$$

$$0,2 \times (-0,3) = -0,06$$

Ainsi, on peut écrire les tables de multiplications des nombres négatifs :

$$\begin{array}{l} -1 \times 1 = -1 \\ -1 \times 2 = -2 \\ -1 \times 3 = -3 \\ -1 \times 4 = -4 \\ -1 \times 5 = -5 \\ -1 \times 6 = -6 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} +(-1) \\ +(-1) \\ +(-1) \\ +(-1) \\ +(-1) \\ +(-1) \end{array}$$

$$-1 \times 7 = -7 \quad \vdots$$

$$-1 \times 8 = -8$$

$$-1 \times 9 = -9$$

$$-1 \times 10 = -10$$

$$\begin{array}{l} -2 \times 1 = -2 \\ -2 \times 2 = -4 \\ -2 \times 3 = -6 \\ -2 \times 4 = -8 \\ -2 \times 5 = -10 \\ -2 \times 6 = -12 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} +(-2) \\ +(-2) \\ +(-2) \\ +(-2) \\ +(-2) \\ +(-2) \end{array}$$

$$-2 \times 7 = -14 \quad \vdots$$

$$-2 \times 8 = -16$$

$$-2 \times 9 = -18$$

$$-2 \times 10 = -20$$

$$\begin{array}{l} -3 \times 1 = -3 \\ -3 \times 2 = -6 \\ -3 \times 3 = -9 \\ -3 \times 4 = -12 \\ -3 \times 5 = -15 \\ -3 \times 6 = -18 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} +(-3) \\ +(-3) \\ +(-3) \\ +(-3) \end{array}$$

$$-3 \times 5 = -15 \quad \vdots$$

$$-3 \times 6 = -18$$

$$-3 \times 7 = -21$$

$$-3 \times 8 = -24$$

$$-3 \times 9 = -27$$

$$-3 \times 10 = -30$$

II - Produit de deux nombres négatifs

En "descendant" les tables, on ajoute le nombre (-1 pour la table de -1, -2 pour la table de -2, etc.) car pour passer de 1 à 2 on ajoute 1, pour passer de 2 à 3 on ajoute 1 etc.

Mais si on essaye de "remonter" la table, alors on soustrait le nombre (car pour passer de 3 à 2; de 2 à 1; de 1 à 0; etc. on enlève 1).

Cela donne :

On rappelle que soustraire par un nombre revient à ajouter son opposé
 $-(-1) = +1$

$-1 \times (-5) = 5$	$-2 \times (-5) = 10$	$-3 \times (-5) = 15$
$-1 \times (-4) = 4$:	$-2 \times (-4) = 8$:	$-3 \times (-4) = 12$:
$-1 \times (-3) = 3$ ← $-(-1)$	$-2 \times (-3) = 6$ ← $-(-2)$	$-3 \times (-3) = 9$ ← $-(-3)$
$-1 \times (-2) = 2$ ← $-(-1)$	$-2 \times (-2) = 4$ ← $-(-2)$	$-3 \times (-2) = 6$ ← $-(-3)$
$-1 \times (-1) = 1$ ← $-(-1)$	$-2 \times (-1) = 2$ ← $-(-2)$	$-3 \times (-1) = 3$ ← $-(-3)$
$-1 \times 0 = 0$ ← $-(-1)$	$-2 \times 0 = 0$ ← $-(-2)$	$-3 \times 0 = 0$ ← $-(-3)$
$-1 \times 1 = -1$ ← $-(-1)$	$-2 \times 1 = -2$ ← $-(-2)$	$-3 \times 1 = -3$ ← $-(-3)$
$-1 \times 2 = -2$ ← $-(-1)$	$-2 \times 2 = -4$ ← $-(-2)$	$-3 \times 2 = -6$ ← $-(-3)$
$-1 \times 3 = -3$	$-2 \times 3 = -6$	$-3 \times 3 = -9$

On s'aperçoit que le produit de deux nombres négatifs est positif !

Théorème

- Quand on multiplie un nombre **positif** par un nombre **négatif**, le résultat est **négatif**.
- Quand on multiplie deux nombres **négatifs**, le résultat est **positif**.

Exercices n°5, 6 et 7 page 42

Correction du n°7 page 42

a) Faisons le calcul de gauche à droite, un produit à la fois :

$$\begin{aligned} & (-1) \times (-2) \times (-2) \times (+1) \times (-3) \quad 4 \text{ nombres négatifs} \\ & = 2 \times (-2) \times (+1) \times (-3) \\ & = -4 \times (+1) \times (-3) \\ & = -4 \times (-3) = 12 \end{aligned}$$

b) Cette fois-ci, on va rassembler les facteurs par deux et faire plusieurs produits en une étape :

$$\begin{aligned} & (-4) \times (-1) \times (-1) \times (+2) \times (-3) \times (-1) \quad 5 \text{ nombres négatifs} \\ & = 4 \times (-2) \times 3 \\ & = -8 \times 3 = -24 \end{aligned}$$

c) $5 \times (-2) \times (+2) \times (+5) \times (-1)$ 2 nombres négatifs

$$\begin{aligned} & = -10 \times 10 \times (-1) \\ & = -100 \times (-1) = 100 \end{aligned}$$

d) $(-8) \times (+2) \times (+1) \times (+1) \times (-2) \times (-2) \times (-2)$ 4 nombres négatifs

$$\begin{aligned} & = -16 \times 1 \times 4 \times (-2) \\ & = -16 \times (-8) = 128 \end{aligned}$$

Lorsqu'on fait plein de multiplications à la suite, on s'aperçoit que si les nombres négatifs vont par deux (autrement dit s'il y en a un nombre pair), alors le résultat est positif. Sinon (si le nombre de nombres négatifs est impair), le résultat est négatif.

III - Divisions de nombres relatifs

Tout ce qu'on a vu sur les multiplications de nombres relatifs est valable avec la division :

Théorème

- *Lorsqu'on divise un nombre positif par un nombre négatif, le résultat est négatif.*
- *Lorsqu'on divise un nombre négatif par un nombre positif, le résultat est négatif.*
- *Lorsqu'on divise deux nombres négatifs, le résultat est positif.*

Exercices n°8 et 9 page 42

IV - Pour aller plus loin

J'ai affirmé que les règles de multiplications qu'on a pu observer sur les nombres entiers sont toujours valables sur les nombre relatifs... mais faut-il me croire sur parole ?

Nous pouvons démontrer que tout cela est bien valable, à condition d'accepter que l'on veut que le distributivité numérique s'applique toujours. C'est à dire que par exemple :

$$3,7 \times (10 + 2) = 3,7 \times 10 + 3,7 \times 2$$

Distributivité

Reprenons notre hypothèse : $3,7 \times (-12) = -44,4$. Comment vérifier qu'elle est vraie ?

Le nombre $-44,4$ est l'opposé de $44,4$, donc si notre hypothèse est vraie, en faisant le somme des deux, on devrait trouver zéro. Essayons :

$$\begin{aligned} 3,7 \times (-12) + 3,7 \times 12 &= \underbrace{3,7} \times (-12) + \underbrace{3,7} \times 12 \\ &= \underbrace{3,7} \times ((-12) + 12) && \text{mais } 12 \text{ et } -12 \text{ sont opposés, donc leur somme vaut zéro} \\ &= 3,7 \times 0 && \text{et le produit de zéro par n'importe quel nombre vaut zéro} \\ &= 0 \end{aligned}$$

On a démontré que $3,7 \times (-12)$ est l'opposé de $3,7 \times 12$, et donc que $3,7 \times (-12) = -44,4$.

Exercice

On peut essayer de démontrer que $-3,7 \times (-12)$ est l'opposé de $3,7 \times (-12)$ pour montrer que le produit de deux nombres négatifs est un nombre positif.

$$\begin{aligned} -3,7 \times (-12) + 3,7 \times (-12) &= 3,7 \times \underbrace{(-12)} + (-3,7) \times \underbrace{(-12)} \\ &= (3,7 + (-3,7)) \times \underbrace{(-12)} \\ &= 0 \times (-12) \\ &= 0 \end{aligned}$$

V - Bilan : pour retenir facilement

Théorème

- *Deux nombres de même signe $\rightarrow$ le produit est positif*
- *Deux nombres de signes différents $\rightarrow$ le produit est négatif*

On peut aussi retenir :

Les nombres positifs sont mes amis, les négatifs mes ennemis.

- Les amis de mes amis sont mes amis
- les ennemis de mes ennemis sont mes amis
- les amis de mes ennemis sont mes ennemis
- les ennemis de mes amis sont mes ennemis

Exercices n°22 et 31 page 44

DM : Exercices n°23 page 44 et n°33 page 45 + bonus : n°36 page 45