Chapitre 10

Transformations

Une tranformation est une action sur des objets géométriques. Nous en connaissons déjà deux : la symétrie axiale et la symétrie axiale.

On décrit souvent les transformations du plan par un mouvement qui permet de déplacer des figures. En réalité, la figure que l'on veut "déplacer" reste à sa place, mais on va la redessiner à l'endroit où elle va finir le mouvement. Cette nouvelle figure s'appelle **l'image** de la figure de départ par la transformation considérée.

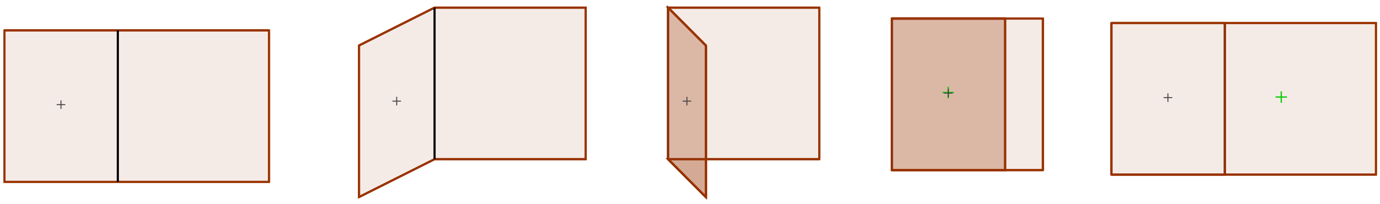
I - Rappels : Symétries

a. Symétrie axiale

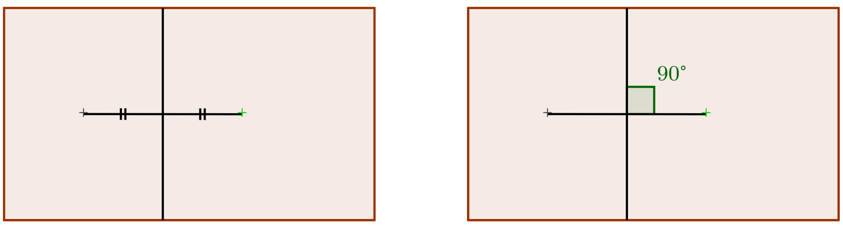
Définition

Deux figures sont **symétriques par rapport à une droite**, *si elles se superposent parfaitement quand on plie la feuille le long de la droite.*

Que se passe-t-il pour la figure la plus simple (c'est à dire le point) ?

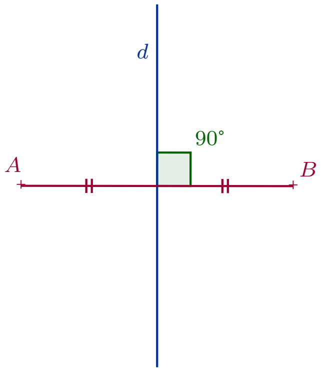


On remarque qu'en pliant la feuille, on obtient un deuxième point, de "l'autre côté" de la droite de pliage. Si on relie ces deux points, on obtient un segment qui a les propriétés suivantes :



- il est coupé par la droite de pliage en son milieu
- il est perpendiculaire à la droite de pliage.

Ces propriétés correspondent à la définition de la **médiatrice** d'un segment.



Définition

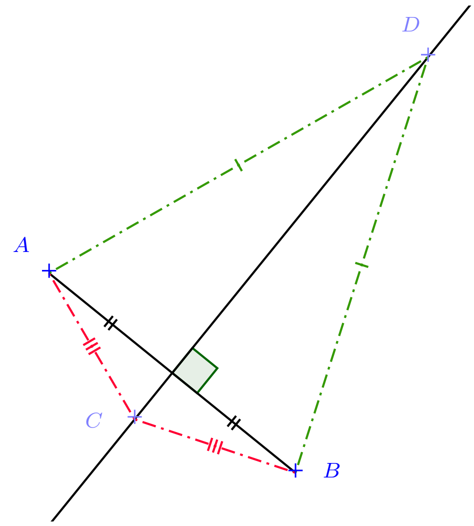
> *La **médiatrice** d'un segment est la droite qui coupe ce segment **perpendiculairement en son milieu**.*

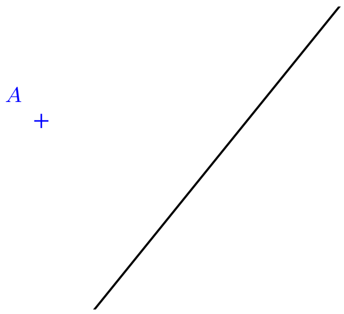
Sur le dessin, la droite d est la médiatrice du segment $[AB]$.

Théorème

> *La médatrice d'un segment $[AB]$ est l'ensemble des points qui sont à la même distance du point A et du point B.*

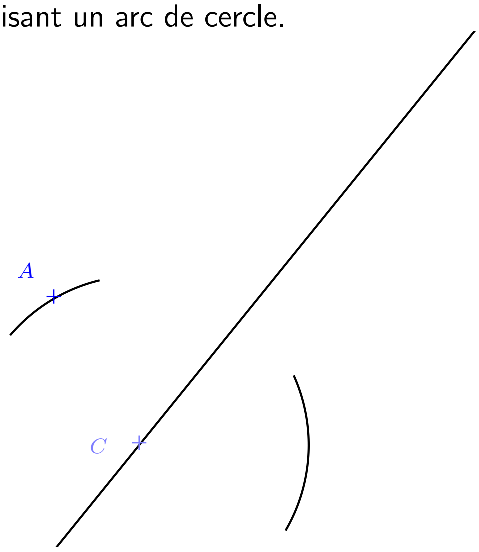
Cela signifie que dès qu'un point M est sur la médiatrice du segment $[AB]$, alors j'ai l'égalité de longueurs $MA = MB$, mais également que dès qu'un a une égalité de longueur du type $NA = NB$, cela signifie que le point N est sur la médiatrice du segment $[AB]$.



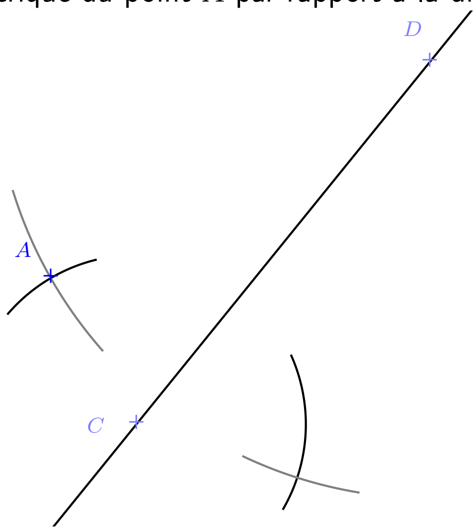


Donc, quand on a le point A et la droite d et que l'on veut tracer le point B (symétrique du point A par rapport à la droite d), on peut n'utiliser que le compas. En effet, celui-ci permet de faire de reports de longueurs.

On pique n'importe où sur la droite (par exemple ici en C). On écarte le compas jusqu'au point A, puis on reporte cet écartement de l'autre côté de la droite en faisant un arc de cercle.



On fait ensuite exactement de même avec un autre point (ici D).
L'intersection de mes deux arcs de cercles est le point B, symétrique du point A par rapport à la droite.



b. Symétrie centrale

Comme son nom l'indique, la symétrie centrale ne se fait pas (comme la symétrie axiale) par rapport à un axe (une droite), mais par rapport à un **centre** (un **point**).

Si nous devions inventer une telle symétrie, que pourrions nous faire ?

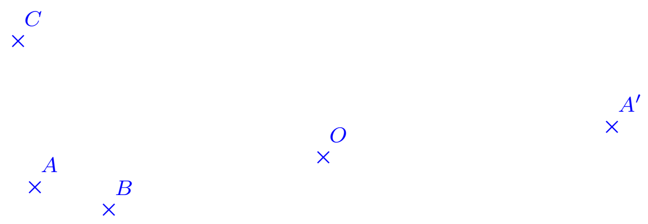
Traçons par exmple le symétrique de A par rapport au centre O :

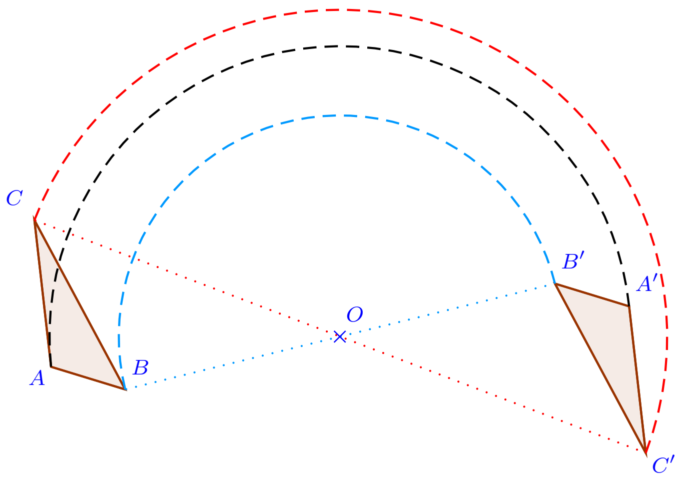
Pour le cas très simple où on trace le symétrique d'un point, il suffit de prolonger la demie droite et de reporter la longueur :

Théorème

Si le point A' est le symétrique de A par rapport au point O, alors le point O est le milieu du segment $[AA']$.

Pour comprendre comment fonctionne cette symétrie, nous allons ajouter quelques points :





Le symétrique du triangle ABC est un triangle identique à ABC, mais qu'on a fait **tourner d'un demi-tour autour du point O**.

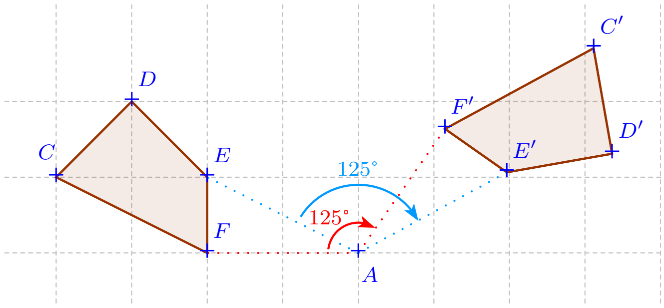
Ces notions étant de l'an dernier, il n'y a pas d'exercices dans le livre, mais vous pouvez vous entrainer sur Labomep, ou alors créer vos propres exercices :

Faites une figure géométrique, tracez une droite d et point O, et trouvez l'image de votre figure par la symétrie d'axe d et l'image par la symétrie de centre O.

II - Rotations : on tourne autours d'un point

La rotation est la transformation du plan qui fait tourner autour d'un point.
Dans une rotation, il faut préciser :

- le centre (c'est le point autour duquel on tourne)
- l'angle (de 0° à 360°)
- le sens (dans le sens des aiguilles d'une montre, ou dans le sens contraire des aiguilles d'une montre)



Ici on a tracé l'image du quadrilatère $CDEF$ par la rotation de :

- centre A
- angle 125°
- sens horaire

Exercices des pages 184 et 185

III - Translations : on glisse sans tourner

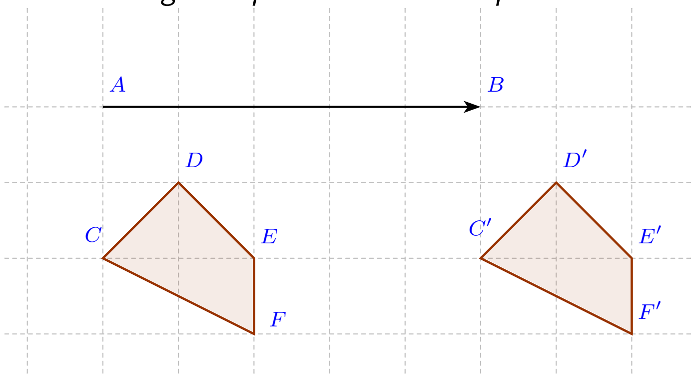
La translation est la transformation du plan qui déplace sans faire tourner (mouvement de **glissement**).
Pour la décrire de façon précise, il faut indiquer :

- la **direction** du déplacement (horizontal, vertical, le long de la droite (AB)...)
- le **sens** du déplacement (vers le haut, vers le bas, vers la droite, vers le point A...)
- la longueur du déplacement.

Ces trois informations sont celles données par une flèche.

Exemple

Tracer l'image du quadrilatère CDEF par la translation qui transforme A en B.



Ici on a :

- *direction : horizontale*
- *sens : vers la droite*
- *longueur : 5 carreaux*

Exercices des pages 182 et 183

IV - Propriétés

Toutes ces transformations conservent :

- les longueurs
- les angles

Cela signifie que si $AB = 5\,\text{cm}$, l'image du segment $[AB]$ mesure aussi 5 cm ; ou encore si le triangle ABC est rectangle en C, son image A'B'C' sera rectangle en C'.

On remarque que pour une translation, l'image d'un segment est un segment parallèle à celui de départ. C'est aussi le cas de la symétrie centrale, mais pas de la symétrie axiale, ni des rotations d'angle différents de 180°.

Exercices des pages 187 à 191