Chapitre 14

Volumes

1 Définition

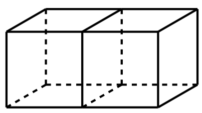
Définition

Le volume d'un solide est la mesure de l'espace contenu dans ce solide.

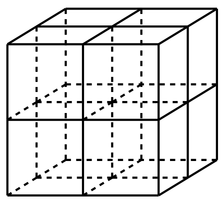
Pour pouvoir mesurer un volume, on utilise des unités de volume qui correspondent l'espace contenu dans un cube :

- Un mètre cube (noté m^3) est le volume contenu dans un cube dont les arêtes mesurent 1 mètre.
- Un centimètre-cube (noté cm^3) est le volume contenu dans un cube de 1 cm de côté.
- ...

Si on place deux petits cubes de $1\,cm^3$ l'un à côté de l'autre, on obtient un pavé droit de $2\,cm^3$.



Attention ! $2\,cm^3$ n'est pas le volume d'un cube de 2 cm de côté !



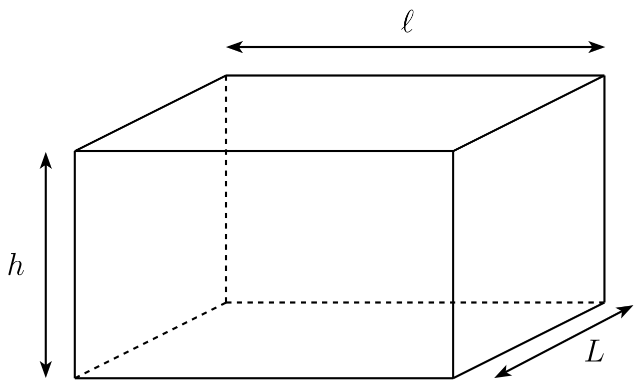
Il y a $8\,cm^3$ dans un cube de 2 cm de côté :
Volume $= 2\,cm \times 2\,cm \times 2\,cm = 2^3\,cm^3 = 8\,cm^3$

On peut découper un solide en petits cubes pour pouvoir estimer son volume.

Faire les activités de l'IREM Paris Nord : 1 (aide), 4 et 5

Facultatif : 6

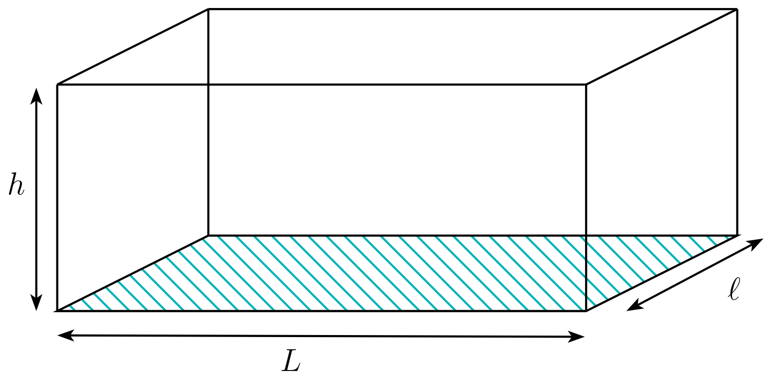
De manière générale, pour calculer le volume d'un pavé :



$$\boxed{V = \ell \times L \times h}$$

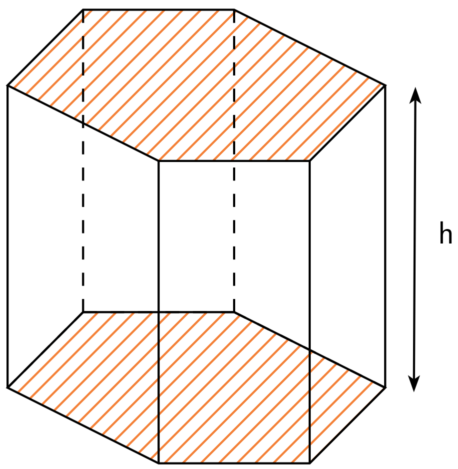
2 Formules pour calculer les volumes

Nous avons déjà vu pour un pavé droit :



Volume $= \ell \times L \times h$
Cela correspond à :

aire de la base $\times$ hauteur

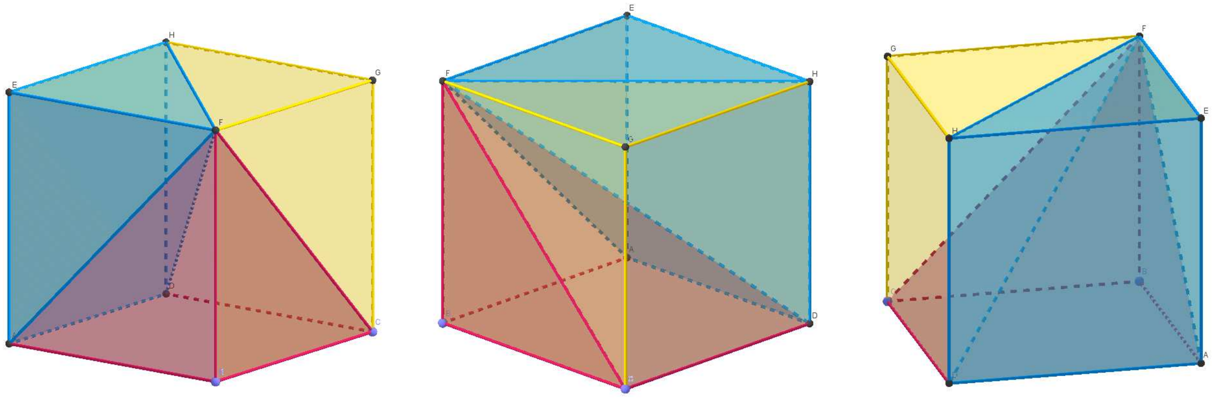


Volume $=$ aire d'une base $\times$ hauteur

L'aire de la base peut être donnée en cm^2 (l'aire est la mesure d'une surface plane, en 2 dimensions). En multipliant par une longueur en cm on a alors : cm$^2\times$ cm $=$ cm $\times$ cm $\times$ cm $=$ cm^3

3 Volume d'une pyramide

Activité 1
Le cube présenté dans ce document est consitiué de 3 pyramides identiques.



Notons c la longueur d'une arête de ce cube. Dans votre cahier d'exercice, répondez aux questions suivantes :

1. Décrivez le plus précisement possible la base de cette pyramide.
2. Quelle est la hauteur de cette pyramide ?

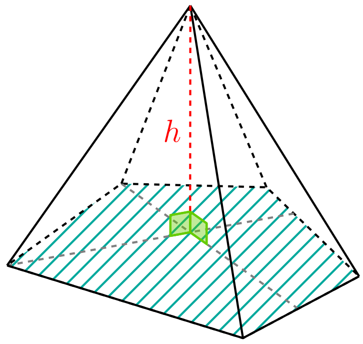
3. Comment calculer le volume total du cube ? Donner la réponse sous forme d'une expression littérale en fonction de c.

4. Déduisez-en le volume d'une des trois pyramides en fonction de c.

Dans l'activité suivante, vous avez une pyramide pleine d'eau. Avec un bouton glissant vous pouvez transvaser le liquide de la pyramide vers un pavé droit de même base et de même hauteur que la pyramide. Obervez ce qu'il se passe : cliquez ici.

En conclusion, la formule générale pour calculer le volume d'une pyramide est :

$$\boxed{V_{\text{pyramide}} = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}}$$



Remarque

C'est la même formule pour les cônes, et comme l'aire de la base (qui est un disque) est $\pi \times \textit{rayon}^2$, cela donne :

$$V_{\textit{cône}} = \frac{\pi \times \textit{rayon}^2 \times \textit{hauteur}}{3}$$

Exercices n°14 et 15 page 240 et 16 page 241

Pour aller plus loin :

Pourquoi est-ce que toutes les pyramides de même base et de même hauteur (qui peuvent être différentes !) ont le même volume ? Principe de Cavalieri

Exercice n°63 page 247

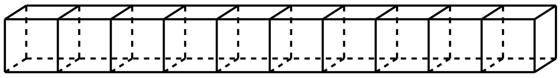
4 Changements d'unités

Le mètre cube peut se décliner avec tous les préfixes qu'on a vu dans le chapitre sur les puissances de 10.

Nom du préfixe	notation	puissance de 10
giga	G	10^9
méga	M	10^6
kilo	k	10^3
hecto	h	10^2
deca	da	10^1
déci	d	10^{-1}
centi	c	10^{-2}
milli	m	10^{-3}
micro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}

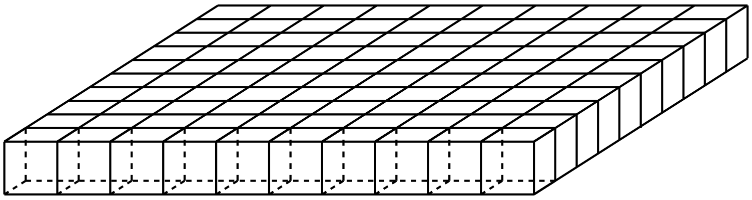
Attention : les puissances indiquées dans ce tableau valent pour passer du centimètre au décimètre par exemple, mais qu'en est-il pour passer du cm^3 au dm^3 ?

Si on met en ligne 10 petits cubes de $1\,\text{cm}^3$, on n'obtient pas un cube de 1 dm de côté, on obtient juste une ligne de 1 dm de longueur :

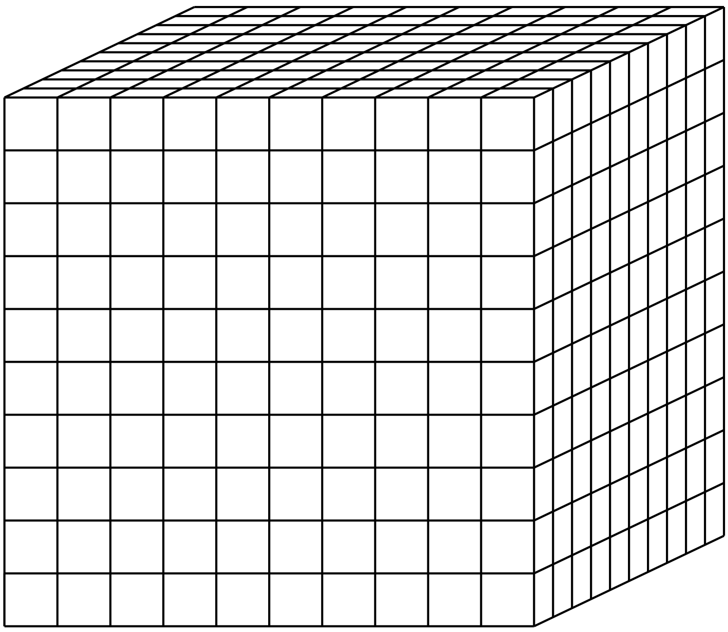


Son volume est égale à $10\,\text{cm}^3$, mais pas à $1\,\text{dm}^3$!

Pour avoir $1\,\text{dm}^3$, il faut encore aligner cette même barre 10 fois pour former un carré de 10 sur 10 cubes...



puis il faut encore empiler ce carré 10 fois en hauteur pour obtenir un cube complet.



Combien y a-t-il de cm^3 dans $1\,\text{dm}^3$?

$10\,\text{cm}^3$ dans une ligne, fois 10 lignes : dans le carré du bas, il y a 100 cubes donc $100\,\text{cm}^3$. Ce carré est répété 10 fois pour obtenir le cube, cela fait donc $100 \times 10 = 1\,000\,\text{cm}^3$.

Conclusion : $1\,\textbf{dm}^3 = 10^3\,\textbf{cm}^3$

On peut voir cela sous cet angle : $1\,\text{dm} = 10\,\text{cm}$, donc $1\,\text{dm}^3 = (10\,\text{cm})^3 = 10\,\text{cm} \times 10\,\text{cm} \times 10\,\text{cm} = 10 \times 10 \times 10\,\text{cm} \times \text{cm} \times \text{cm} = 10^3\,\text{cm}^3$

Cela vaut pour n'importe quel changement de multiple. Il suffit de remplacer le préfixe par la puissance de 10 correspondante. Par exemple :

- ⋆ $5,6\,\text{Gm}^3 = 5,6\,\text{Gm}^3 = 5,6 \times (10^9\,\text{m})^3 = 5,6 \times 10^9\,\text{m} \times 10^9\,\text{m} \times 10^9\,\text{m}$

  $= 5,6 \times 10^9 \times 10^9 \times 10^9\,\text{m} \times \text{m} \times \text{m} = 5,6 \times 10^{27}\,\text{m}^3$ (la réponse est en notation scientifique)

- ⋆ $6,2\,\mu\text{m}^3 = 6,2\,\mu\text{m}^3 = 6,2 \times (10^{-6}\,\text{m})^3 = 6,2 \times (10^{-6})^3\,\text{m}^3 = 6,2 \times 10^{-6} \times 10^{-6} \times 10^{-6}\,\text{m}^3$

  $6,2\,\mu\text{m}^3 = 6,2 \times 10^{-18}\,\text{m}^3$

DM : Problème 15 page 264 *+ énigme 60 page 247*

Le mètre cube et ses multiples sont utilisés pour des contenances (le volume d'une pièce, ...). On trouve une deuxième unité très utilisée pour les volumes : le litre (noté ℓ ou L). On l'utilise particulièrement pour les liquides.

Pour convertir un litre en mètre cube, on peut se rappeler que ça correspond à une brique de lait. C'est donc plus grand que le cm^3 mais nettement plus petit que le mètre cube : entre les deux c'est le décimètre cube.

$$\boxed{1\ell = 1\text{dm}^3 = 1\,000\,\text{cm}^3 = 0,001\,\text{m}^3}$$

On peut aussi utiliser le tableau de conversion vu en primaire, mais c'est beaucoup plus long, et il y a plus de risques d'erreur.

km^3			hm^3			dam^3			m^3			dm^3			cm^3			mm^3		
											kL	hL	daL	L	dL	cL	mL			
								0	0	0	1	5	8	7	7	2				

Exemple

$1\,587,72$ *L* $= 1,58772$ *m*^{3} $= 0,00158772$ *dam*^{3}

Tâche complexe 2 page 253

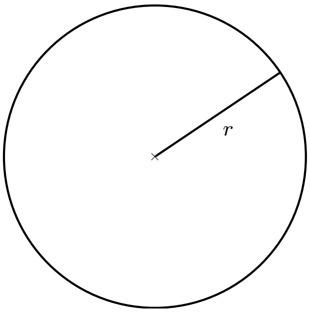
Formulaire

Périmètres

Définition

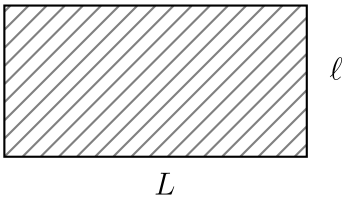
Le périmètre est la longueur du contour d'une figure.

Pour le trouver il suffit d'additionner les longueurs des côtés. Il n'y a qu'une formule à connaître :

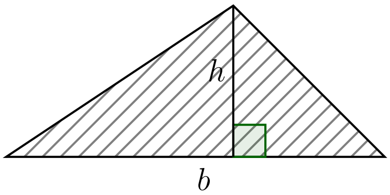


Périmètre du cercle $= 2\pi r$

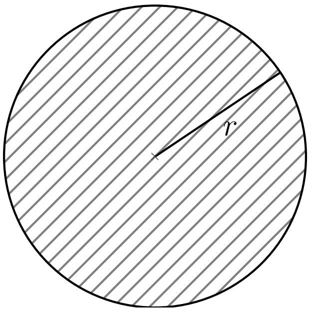
Aires



Aire du rectangle $= L \times \ell$



Aire du triangle $= \dfrac{b \times h}{2}$

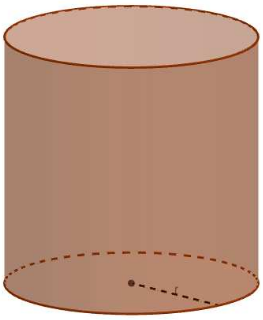


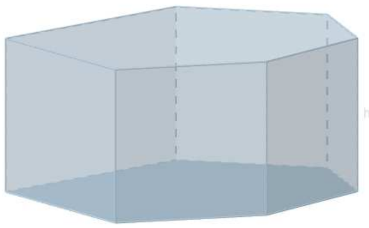
Aire du disque $= \pi r^2$

Volumes

Les volumes des prismes et cylindres se calculent avec la formule :

Volume $=$ Aire de la base $\times$ hauteur





Les volumes des pyramides et cônes se calculent avec la formule :

$$\text{Volume} = \frac{\text{Aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$$