Arithmétique

I - Vocabulaire

Vous connaissez trois types de nombres :

- Les **nombres entiers**, qui permettent de compter des objets. $(0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,...)$
- Les **nombres décimaux**, qui permettent de mesurer. $(0,3\,;\,5,187\,645\,;\,12,01\ ...)$
- Les nombres **rationnels** qui s'écrivent comme le quotient de deux nombre entiers $\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{5}{6}\,...\right)$

Par exemple, ça n'a pas de sens de dire « j'ai $1,2$ frères » : $5,81$ est un nombre décimal.

L'**arithmétique** est l'étude des nombres **entiers**.

Dans la suite de ce chapitre, nous n'allons utiliser (presque) que des nombres ***entiers****.*

Les quatre phrases suivantes veulent dire la même chose :

« 18 est **divisible par** 6 »

« 6 est un **diviseur** de 18 »

« 6 divise 18 »

« 18 est un **multiple** de 6 »

signifie qu'on peut écrire 18 comme le produit de 6 avec un nombre entier.

C'est bien le cas puisque $18 = 6 \times 3$.

Les mots « diviseur » et « divisible » ont la même racine que le mot « division ». En fait 18 est divisible par 6 parce que la division $18 \div 6$ a pour résultat un nombre **entier** (3).

Exercice

1. *Donner la liste de tous les diviseurs de 18.*

   Les diviseurs de 18 sont : 1, 2, 3, 6, 9 et 18

2. *Trouver deux multiples de 18.*

   On peut par exemple donner $2 \times 18 = 36$ et $3 \times 18 = 54$ qui sont des multiples de 18.

3. *Quel est le plus grand nombre qui est à la fois un diviseur de 18 et un diviseur de 21 ?*

   Les diviseurs de 21 sont : 1, 3, 7 et 21. Le plus grand qui est à la fois dans cette liste et dans les diviseurs de 18 est le nombre 3.

4. *Simplifier la fraction $\frac{18}{21}$.*

   Le résultat de la question précédente montre qu'on peut simplifier par 3 :

$$\frac{18}{21} = \frac{6 \times 3}{7 \times 3} = \frac{6}{7}$$

II - Critères de divisibilité

Un nombre est un multiple de :

→ 2 s'il finit par 0, 2, 4, 6 ou 8

→ 5 s'il finit par 0 ou un 5

→ 10 s'il se termine par 0

→ 3 si la somme de ses chiffres est un multiple de 3

→ 9 si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

ATTENTION : ces critères s'appliquent SEULEMENT à ces quelques nombres. Il n'y a pas de critère de divisibilité « facile » pour 7 par exemple.

Remarque : pour 3 et 9 il faut parfois « recommencer » l'addition des chiffres. Par exemple, $6\,387$ est un multiple de 3 car $6+3+8+7=24$ et $2+4=6$.

À faire : Pixel art sur la divisibilité

III - Nombres premiers

Le mathématicien Érathostène (III^e siècle avant J-C) a utilisé un **algorithme**, qu'on appelle le « crible d'Érathostène » :

1. On barre 1
2. On passe à la case suivante
3. Si le nombre n'est pas barré, on l'entoure.
4. Dans la suite de la liste, on barre tous les multiples du nombre que l'on vient d'entourer.
5. On revient au nombre qu'on vient d'entourer puis on recommence à l'étape 2.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Les nombres entourés sont spéciaux : ils ne sont divisibles par aucun autre nombre (sauf 1), sinon ils auraient été barrés ! Ces nombres portent un nom :

Définition

*Un **nombre premier** est un nombre qui est divisible par exactement 2 nombres (ni plus, ni moins) :*

- *par lui-même,*
- *par 1.*

*Autrement dit, un **nombre premier** est un nombre qui **ne peut pas se décomposer** en produit de nombres plus petits.*

Nous utiliserons les nombres premiers notamment pour savoir quand est-ce qu'on a fini de simplifier une fraction. Il est pratique d'en savoir quelques uns par cœur.

À faire : Apprendre par cœur les nombres premiers jusqu'à 31.

Exemple

Décomposer 180 en produit de facteurs premiers.

Produit *: résultat de la multiplication*
Facteurs *: nombres qui sont dans une multiplication*

On cherche donc à trouver des nombres (entiers bien sûr) tels que $180 = \ldots \times \ldots$. *Il y a de nombreuses solutions différentes, mais commençons par exemple par :*

$$180 = 18 \times 10$$

On a décomposé 180 *en produit, mais les facteurs sont-ils des nombres premiers ? Non ! On continue en décomposant tous les facteurs qui ne sont pas premiers.*

$180 = 18 \times 10$
$180 = \overbrace{9 \times 2}^{18} \times \overbrace{2 \times 5}^{10}$
$180 = 9 \times 2 \times 2 \times 5$
$180 = 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 5$

Attention, à chaque étape, le calcul doit donner 180 donc on recopie tout le calcul, en remplaçant un nombre qui n'est pas premier par sa décomposition.

On peut trier la décomposition finale par ordre croissant, la réponse sera donc :

$$\boxed{180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5}$$

IV - Problèmes

1. 147 élèves sont répartis par équipe de 16 pour un concours. Combien d'équipes entières peut-on constituer ? Combien manquerait-il d'élèves pour constituer la dernière équipe ?

$$\begin{array}{r|l} 147 & 16 \\ \cline{2-2} -144 & 9 \\ \cline{1-1} 3 & \end{array}$$

Pour faire cette division, on écrit la table de 16 sur son brouillon, en faisant « +16 » à chaque étape : 16, 32, 48,...
On peut décomposer 147 *grâce à la division euclidienne :*

$$147 = 16 \times 9 + 3$$

Il y a donc 9 *équipes de* 16 *élèves complètes, et il manque* $16 - 3 = 13$ *élèves pour constituer la* $17^{\text{ème}}$ *équipe.*

2. Un bibliothécaire doit répartir 420 livres sur des étagères. Chaque étagère doit contenir le même nombre de livres. Est-ce possible avec 18 étagères ? Avec 21 étagères ?

$$\begin{array}{r|l} 4\,2\,0 & 1\,8 \\ \cline{2-2} -\underline{3\,6} & 2\,3 \\ 6\,0 & \\ -\underline{5\,4} & \\ 6 & \end{array}$$

$420 = 18 \times 23 + 6$, *donc si on met 23 livres sur chaque étagère, il restera 6 livres. Le bibliothécaire ne pourra pas mettre le même nombre de livre sur chaque étagère.*

$420 = 21 \times 20$, *donc si on essaye de répartir 420 livres sur 20 étagères, il y aura 20 livres sur chaque étagères. C'est donc possible de répartir les livres équitablement sur 21 étagères.*

$$\begin{array}{r|l} 4\,2\,0 & 2\,1 \\ \cline{2-2} -\underline{4\,2} & 2\,0 \\ 0\,0 & \\ -\underline{0} & \\ 0 & \end{array}$$

Remarque

La **division euclidienne** *intervient lorsqu'on veut faire des paquets ou des groupes équilibrés avec des choses qu'on ne peut pas couper. Parfois le dernier paquet ou le dernier groupe est plus petit que les autres : c'est le reste.*

Par exemple si je veux partager 153 Schoko-Bons® aux 20 élèves d'un classe, je pose :

$$\begin{array}{r|l} 1\,5\,3 & 2\,0 \\ \cline{2-2} -\underline{1\,4\,0} & 7 \\ 1\,3 & \end{array}$$

Ce qui fait 7 Schoko-Bons® par élève et il en reste 13 pour moi !
Lorsqu'on veut écrire le « résultat » d'une division euclidienne, on écrit une égalité :

$$153 = 20 \times 7 + 13$$

Vous l'avez peut-être déjà vu sous cette forme :

$$\boxed{\text{dividende} = \text{diviseur} \times \text{quotient} + \text{reste}} \quad \text{où reste} < \text{diviseur}$$

mais le plus important reste de comprendre à quoi correspondent les nombres qu'on manipule !

Remarque

Lorsque le reste est égal à zéro, ça veut dire qu'on a trouvé une décomposition en produit. Par exemple :

$$\begin{array}{r|l} 7\,2\,0 & 9 \\ \cline{2-2} -\underline{7\,2} & 8\,0 \\ 0\,0 & \\ -\underline{0} & \\ 0 & \end{array}$$

Le reste est zéro, donc 720 *est un multiple de* 9. *La division euclidienne de* 720 *par* 9 *est :* $720 = 9 \times 80$.