

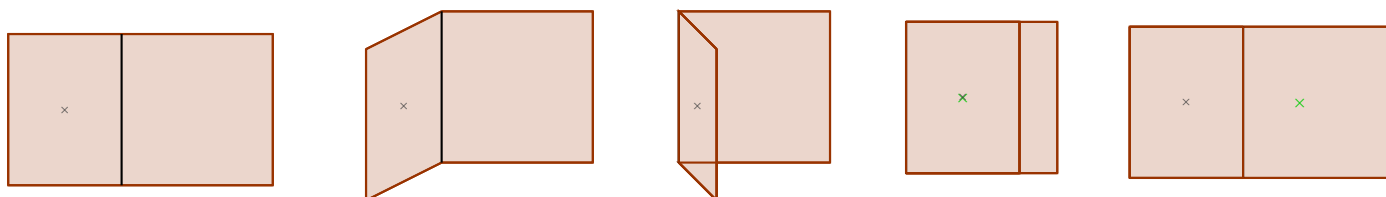
Symétrie axiale

I - Qu'est-ce que c'est ?

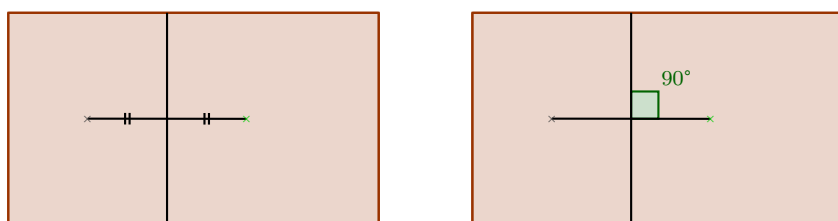
Définition (intuitive, vue en 6ème)

Deux figures sont **symétriques par rapport à une droite**, si elles se superposent parfaitement quand on plie la feuille le long de la droite.

Que se passe-t-il pour la figure la plus simple (c'est à dire le point) ?

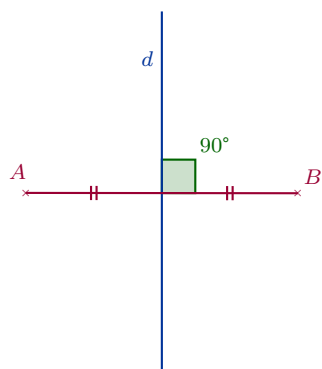


On remarque qu'en pliant la feuille, on obtient un deuxième point, de "l'autre côté" de la droite de pliage. Si on relie ces deux points, on obtient un segment qui a les propriétés suivantes :



- il est coupé par la droite de pliage en son milieu
- il est perpendiculaire à la droite de pliage.

Ces propriétés correspondent à la définition de la **médiatrice** d'un segment.



Définition

La **médiatrice** d'un segment est la droite qui coupe ce segment **perpendiculairement en son milieu**.

Sur le dessin, la droite d est la médiatrice du segment $[AB]$.

Cela nous permet de donner une définition plus précise du symétrique :

Le **symétrique d'un point** A par rapport à une droite d est le point A' tel que d est la médiatrice du segment $[AA']$.

Remarque : Si le point A est sur la droite d , son symétrique est lui-même. On dit que A et A' sont **confondus**.

II - Comment construire un symétrique ?

Une figure géométrique étant un ensemble de points, il suffit de tracer le point symétrique de chaque point pour avoir le symétrique d'une figure.

a. Avec une équerre et une règle

Pour tracer le symétrique du point M par rapport à la droite d , on fait glisser son équerre le long de la droite d jusqu'à être sur le point M , on trace la perpendiculaire, que l'on prolonge de l'autre côté de la droite d . On mesure le long de la droite que l'on vient de tracer la distance entre le point M et la droite d , puis on reporte cette longueur de l'autre côté.

Ceci est expliqué avec des animations sur le site [mathenpoche](http://mathenpoche.com)

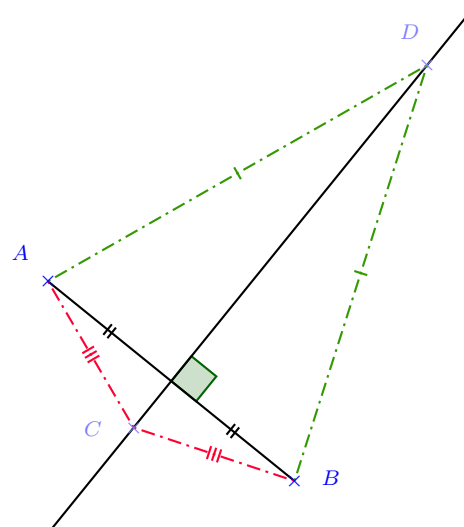
b. Avec le compas

La médiatrice d'un segment a une propriété très intéressante :

À retenir (Propriété d'équidistance de la médiatrice)

La médiatrice d'un segment $[AB]$ est l'ensemble des points qui sont à la même distance du point A et du point B .

Cela signifie que dès qu'un point M est sur la médiatrice du segment $[AB]$, alors j'ai l'égalité de longueurs $MA = MB$, mais également que dès qu'un a une égalité de longueur du type $NA = NB$, cela signifie que le point N est sur la médiatrice du segment $[AB]$.



Énoncé :

Tracez le point B , symétrique du point A par rapport à la droite d , en n'utilisant que le compas.

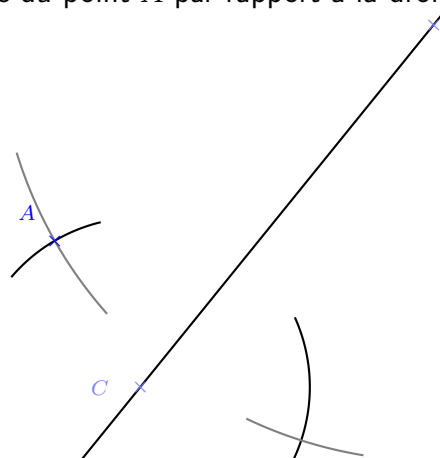
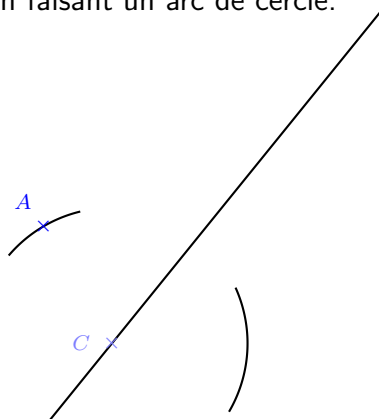
A
x

Méthode :

On pique n'importe où sur la droite (par exemple ici en C). On écarte le compas jusqu'au point A , puis on reporte cet écartement de l'autre côté de la droite en faisant un arc de cercle.

On fait ensuite exactement de même avec un autre point (ici D).

L'intersection de mes deux arcs de cercles est le point B , symétrique du point A par rapport à la droite.



III - Propriétés de conservation

Lorsqu'on trace le symétrique d'une figure, on obtient une figure symétrique qui a la même « forme » et les mêmes dimensions que la figure de départ : si on les découpait, on pourrait les superposer parfaitement.

Cela montre qu'appliquer une symétrie à une figure permet d'obtenir une autre figure qui a :

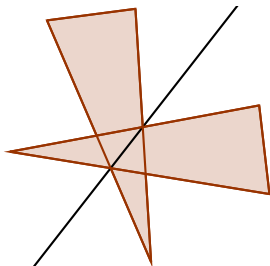
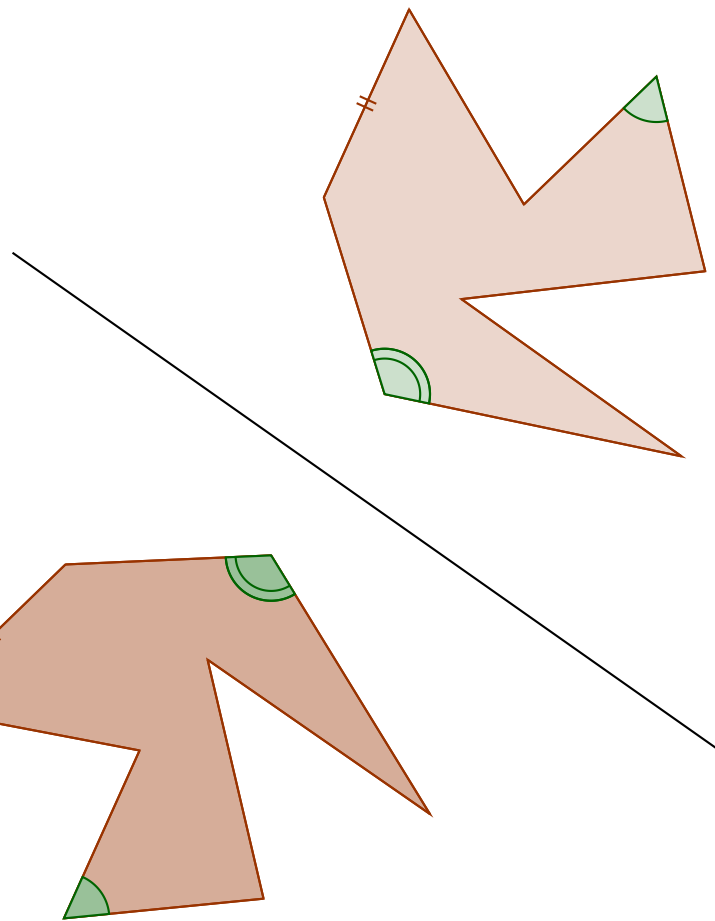
- les mêmes longueurs
- les mêmes angles
- la même aire

C'est ce qu'on appelle

« **propriétés de conservation** de la symétrie. »

Grace à cette propriété, je peux affirmer que :

- si $\widehat{ABC} = 87^\circ$, alors son symétrique $\widehat{A'B'C'}$ mesurera aussi 87°
- si $AB = 3,2 \text{ cm}$, alors le symétrique du segment $[AB]$ mesurera lui aussi $3,2 \text{ cm}$.



Remarque : cela est également vrai dans les situations où la figure traverse l'axe de symétrie.

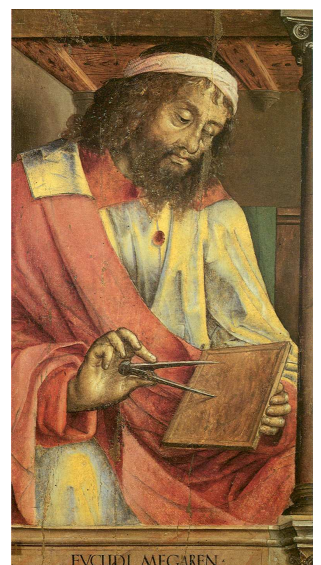
IV - Démontrer des propriétés grâce aux axes de symétrie

a. Introduction historique [hors programme]

Comment créé-t-on les mathématiques ? Comment les professeurs de mathématiques savent-ils que tout ce qu'ils nous font apprendre est vrai ?

Les mathématiciens se sont mis d'accord sur des choses tellement évidentes que tout le monde est d'accord pour dire que c'est vrai : c'est ce qu'on appelle les **axiomes**. Par exemple, le mathématicien **Euclide** (antiquité Grecque) a fondé la géométrie sur cinq axiomes :

- 1) On peut tracer un segment en reliant deux points quelconques distincts.
- 2) Un segment peut être prolongé en une droite.
- 3) À partir d'un segment, on peut tracer un cercle dont le centre est un des points du segment et dont le rayon est la longueur du segment.
- 4) Tous les angles droits sont égaux entre eux.
- 5) Étant donné un point et une droite ne passant pas par ce point, il existe une seule droite passant par ce point et parallèle à la première.



L'idée est qu'à partir de ces bases, on va pouvoir **démontrer** un théorème grâce à la logique, et de ce théorème va découler un autre théorème... et on peut trouver ainsi toute la géométrie que l'on connaît.

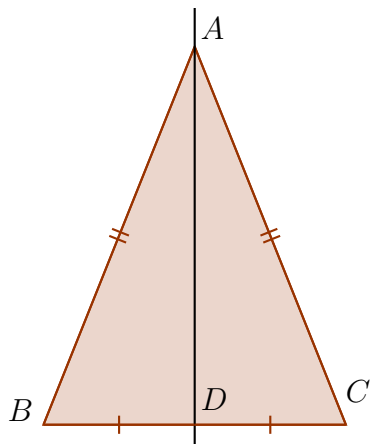
Nous n'allons pas reconstruire toute la géométrie depuis les axiomes en 5^{ème}, mais nous allons nous initier à la démonstration. Pour cela, nous allons revoir certaines propriétés vues en 6^{ème}, et comprendre pourquoi elles sont vraies.

Commençons par les propriétés du triangles isocèle.

Ce que l'on sait qui est vrai :

- les définitions (triangle isocèle, médiatrice, etc.)
- les propriétés de conservation de la symétrie que l'on vient de voir,
- la propriété d'équidistance de la médiatrice (cette propriété pourra être démontrée à partir de la 4^{ème}, quand vous aurez vu le théorème de Pythagore)

b. Triangle isocèle



Prenons par exemple un triangle ABC isocèle en A . Plaçons le point D au milieu de la base principale $[BC]$ et traçons la droite (AD) .

On peut affirmer (puisque ABC est isocèle en A) que le point A est à la même distance de B et de C , donc (par la propriété d'équidistance de la médiatrice) A est sur la médiatrice du segment $[BC]$.

On peut également affirmer que D est sur la médiatrice de $[BC]$.

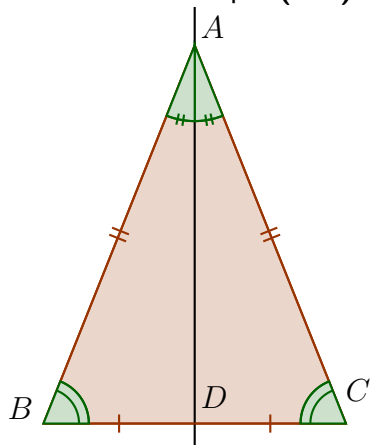
Ainsi, la médiatrice de $[BC]$ est la droite qui passe par le point A et par le point D , c'est donc la droite (AD) !

Considérons maintenant la symétrie d'axe (AD) :

→ B et C sont symétriques l'un de l'autre puisque (AD) est la médiatrice de $[BC]$.

→ A est sur l'axe de symétrie, donc son symétrique est lui même.

Cela montre que **(AD) est un axe de symétrie du triangle ABC .**



Nous pouvons donc affirmer que (AD) est **perpendiculaire à $[BC]$** , mais aussi qu'**elle partage le sommet A en deux angles de même mesure**.

Nous pouvons également affirmer que $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$ puisque ces angles sont symétriques l'un de l'autre.

Tout ce que nous avons vu sur ce triangle ABC isocèle en A est valable pour **n'importe quel triangle isocèle**. Nous venons de **démontrer** des propriétés (ou théorèmes) sur les triangles isocèles !

Dans un triangle isocèle, la médiane issue du sommet principal est aussi la hauteur.

Dans un triangle isocèle, la médiane issue du sommet principal est aussi la bissectrice du sommet principal.

Dans un triangle isocèle, les angles à la base sont égaux.

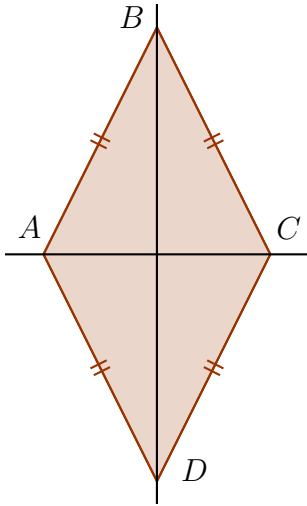
Remarque : Le triangle équilatéral étant un triangle isocèle particulier pour lequel chacun des 3 sommets est un sommet principal, il a 3 axes de symétries, et donc tous ses angles égaux.

Exercices :

1) Tracer un triangle ABC isocèle en B tel que $AB = 5 \text{ cm}$ et $\widehat{ABC} = 130^\circ$.

2) [Cliquer sur le lien](#)

c. Losange



Considérons un losange $ABCD$. Traçons ses diagonales.

On peut affirmer que B et D sont sur la médiatrice de $[AC]$ puisqu'ils sont à la même distance de A et de C . Donc la médiatrice de $[AC]$ est (BD) .

D'après la symétrie d'axe (BD) :

- A est le symétrique de C ,
- B est son propre symétrique,
- D est son propre symétrique,

donc **(BD) est un axe de symétrie du losange $ABCD$.**

On peut en déduire que :

- (BD) et $[AC]$ sont perpendiculaires
- $\widehat{BAD} = \widehat{BCD}$
- (BD) coupe $[AC]$ en son milieu

En faisant le même raisonnement avec (AC) à la place de (BD) , on montre que (AC) coupe $[BD]$ en son milieu et que $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$.

Nous venons de **démontrer** la propriété des diagonales vues dans le premier chapitre :

Les diagonales du losange se coupent perpendiculairement en leur milieu.

On peut même ajouter une nouvelle propriété du losange :

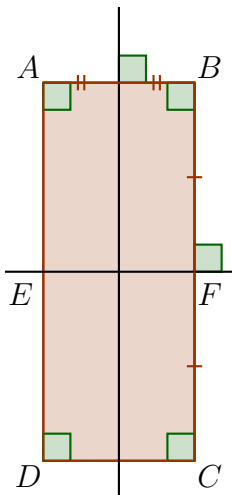
Dans un Losange, les angles opposés sont égaux deux à deux.

Finalement, il est plus facile de retenir les propriétés ci-dessus en comprenant pourquoi elles sont vraies, et pour cela, on peut mémoriser :

Les diagonales d'un losange sont ses axes de symétrie.

Exercice n°20 page 211

d. Rectangle



Soit $ABCD$ un rectangle. Traçons les médiatrices des côtés $[AB]$ et $[BC]$.

Notons F le milieu de $[BC]$ et E l'intersection de la médiatrice de $[BC]$ avec le côté $[AD]$.

Toutes ces informations sont codées ci-contre.

Les angles droits nous permettent d'affirmer que le quadrilatère $ABFE$ est un rectangle, donc $AE = BF = BC \div 2 = AD \div 2$, donc E est le milieu de $[AD]$. Donc (EF) est à la fois la médiatrice de $[BC]$ et de $[AD]$.

Cela montre que (EF) est un axe de symétrie du rectangle $ABCD$.

De même, l'autre médiatrice est un axe de symétrie du rectangle $ABCD$.

Les médiatrices des côtés d'un rectangle sont ses axes de symétrie.

Appliquons la symétrie d'axe (EF) à la diagonale $[AC]$:

- l'image de A est D
- l'image de C est B

donc l'image de $[AC]$ est $[DB]$. Cela montre que $AC = DB$.

De plus, le seul point qui est sa propre image est l'intersection des diagonales : il est donc aussi sur l'axe de symétrie. Appelons ce point O .

Ce raisonnement pouvant s'effectuer aussi par la symétrie d'axe (GH) , on peut même affirmer que O est le **point de concours** des diagonales et des médiatrices des côtés.

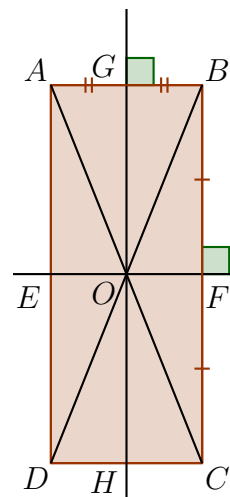
Comme $O \in [EF]$ et que $[EF]$ est la médiatrice de $[AD]$ et de $[BC]$, on peut dire que $OA = OD$ et $OB = OC$.

Le même raisonnement avec $[GH]$ montre que $OA = OB$ et $OD = OC$.

On peut en conclure que $OA = OC$ et comme $O \in [AC]$ O est le milieu de $[AC]$. De même $OB = OD$ et comme $O \in [BD]$, O est le milieu de $[BD]$.

Nous avons ainsi **démontré** que :

Dans un rectangle, les diagonales sont de même longueur et se coupent en leur milieu.



Exercices n°17 page 210, 19 page 211 et 63 page 215

Remarque : Le carré étant à la fois un losange et un rectangle, il a 4 axes de symétries.

Exercices n°21 page 211 et 61 page 215