Arithmétique

I - Les nombres

Vous connaissez plusieurs types de nombres :

- Les **nombres entiers**, qui permettent de compter des objets. (0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; ...)
- Les **nombres décimaux**, qui permettent de mesurer. (0,3 ; 5,187 645 ; 12,01 ...)
- Les nombres relatifs (positifs ou négatifs)
- Les nombres **rationnels** qui s'écrivent comme le quotient de deux nombre entiers $\left(\frac{1}{3} ; \frac{5}{6} ...\right)$
- Les nombres **irrationnels** sont tous ceux qui ne peuvent pas s'écrire avec une fraction $(\sqrt{2} ; \pi ;...)$

*En arithmétique, on ne s'intéresse **que** aux nombres **entiers**.*

II - Divisibilité

a. Vocabulaire

Cela revient exactement au même de dire que :

- « 18 est un **multiple** de 6 »
- « 18 est **divisible par** 6 »
- « 6 est un **diviseur** de 18 »
- « 6 **divise** 18 »

Dans tous les cas, cela signifie qu'on peut écrire 18 comme le produit de 6 avec un nombre entier : c'est bien le cas puisque $18 = 6 \times 3$.

Les mots « diviseur » et « divisible » ont la même racine que le mot « division ». En fait 18 est divisible par 6 parce que la division $18 \div 6$ a pour résultat un nombre **entier**.

Exercice

1. *Donner la liste de tous les diviseurs de 18.*

   Les diviseurs de 18 sont : 1, 2, 3, 6, 9 et 18

2. *Trouver deux multiples de 18.*

   On peut par exemple donner $2 \times 18 = 36$ et $3 \times 18 = 54$ qui sont des multiples de 18.

3. *Quel est le plus grand nombre qui est à la fois un diviseur de 18 et un diviseur de 21 ?*

   Les diviseurs de 21 sont : 1, 3, 7 et 21. Le plus grand qui est à la fois dans cette liste et dans les diviseurs de 18 est le nombre 3.

b. Critères de divisibilité (rappels de 6ème)

Un nombre est divisible par :

- 2 s'il est pair (s'il finit par 0, 2, 4, 6 ou 8)
- 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3 (exemple : 387 est divisible par 3 car $3+8+7=18$ et $1+8=9$ et $9=3\times 3$)
- 4 si les deux derniers chiffres du nombre sont dans la table de 4 (exemple : $4\,654\,516$ est divisible par 4 car 16 l'est)
- 5 s'il finit par un 0 ou un 5
- 9 si la somme de ses chiffres fait 9 (exemple $6\,687$ est divisible par 9 car $6+6+8+7=27$ et $2+7=9$)
- 10 s'il se termine par un zéro.

À faire : Pixel art sur la divisibilité

c. Division euclidienne

Problème

> *Louison organise un tournois de foot. Il y a 423 personnes inscrites.*
> ***Combien d'équipes de 11 joueurs pourra-t-elle faire ?***

Ce problème revient à savoir combien de fois on trouve 11 dans le nombre 423 (c'est à dire résoudre l'opération à trou $11\times ?=423$). Le premier réflexe est de taper la division $423\div 11$ sur sa calculatrice, mais on trouve une valeur approchée décimale $(38,45...)$.

On ne va pas couper des joueurs en morceaux, donc le problème ne correspond pas à une division décimale, mais à une division **euclidienne** : c'est une division qui n'utilise que des nombres **entiers**.

Posons la division comme on le faisait en 6ème.

On trouve que le quotient est égal à 38 avec un reste de 5.

$$\begin{array}{r|l} 423 & 11 \\ \cline{2-2} -33 & 38 \\ \cline{1-1} 93 & \\ -88 & \\ \cline{1-1} 5 & \end{array}$$

Ce résultat correspond à une égalité mathématique précise, qu'il faut savoir retrouver.

Lorsqu'on divise 423 par 11, on trouve presque 38, donc $423\approx 11\times 38$.

Pour avoir une égalité exacte, il faut ajouter le reste :

$$\boxed{423 = 11\times 38+5}$$

Exercice n°24 page 130

$$\begin{array}{r|l} 390 & 26 \\ \cline{2-2} -26 & 15 \\ \cline{1-1} 130 & \\ -130 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Cette division revient au même que l'égalité :

$$390 = 26\times 15$$

On peut en déduire que 390 est un multiple de 26 et aussi un multiple de 15.

Remarque

> *Lorsque le reste de la division euclidienne est égale à zéro, on a trouvé un **multiple** du nombre qu'on divise.*

III - Nombres premiers

Le mathématicien Érathostène (III^e siècle avant J-C) a utilisé un **algorithme**, qu'on appelle le « crible d'Érathostène » :

1. On barre 1
2. On passe à la case suivante
3. Si le nombre n'est pas barré, on l'entoure.
4. Dans la suite de la liste, on barre tous les multiples du nombre que l'on vient d'entourer.
5. On revient au nombre qu'on vient d'entourer puis on recommence à l'étape 2.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Les nombres entourés sont spéciaux : ils ne sont divisibles par aucun autre nombre (sauf 1), sinon ils auraient été barrés ! Ces nombres portent un nom :

Définition

*Un **nombre premier** est un nombre qui est divisible par exactement 2 nombres (ni plus, ni moins) :*

- *par lui-même,*
- *par 1.*

Autrement dit, un nombre premier est un nombre qui ne peut pas se décomposer en produit de nombres plus petits.

Nous utiliserons les nombres premiers notamment pour savoir quand est-ce qu'on a fini de simplifier une fraction. Il est pratique d'en savoir quelques un par cœur.

À faire : Apprendre par cœur les nombres premiers jusqu'à 31.
Exercice n°32 page 131

Exemple d'exercice classique que vous devez savoir faire

> *Décomposer 180 en produit de facteurs premiers.*

Produit : résultat de la multiplication
Facteurs : nombres qui sont dans une multiplication

On cherche donc à trouver des nombres (entiers bien sûr) tels que $180 = \ldots \times \ldots$. Il y a de nombreuses solutions différentes, mais commençons par exemple par :

$$180 = 18 \times 10$$

On a décomposé 180 en produit, mais les facteurs sont-ils des nombres premiers ? Non ! On continue en décomposant tous les facteurs qui ne sont pas premiers.

$180 = 18 \times 10$
$180 = \overbrace{9 \times 2}^{18} \times \overbrace{2 \times 5}^{10}$
$180 = 9 \times 2 \times 2 \times 5$
$180 = 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 5$

Attention, à chaque étape, le calcul doit donner 180 donc on recopie tout le calcul, en remplaçant un nombre qui n'est pas premier par sa décomposition.

On peut trier la décomposition finale par ordre croissant, la réponse sera donc :

$$\boxed{180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5}$$

Exercice n°35 page 131

IV - Problèmes

1. 147 élèves sont répartis par équipe de 16 pour un concours. Combien d'équipes entières peut-on constituer ? Combien manquerait-il d'élèves pour constituer la dernière équipe ?

$$\begin{array}{rr|l} & 147 & 16 \\ - & 144 & 9 \\ \hline & 3 & \end{array}$$

Pour faire cette division, on écrit la table de 16 sur son brouillon, en faisant « +16 » à chaque étape : 16, 32, 48,...
On peut décomposer 147 *grâce à la division euclidienne :*

$$147 = 16 \times 9 + 3$$

Il y a donc 9 *équipes de* 16 *élèves complètes, et il manque* $16 - 3 = 13$ *élèves pour constituer la* $17^{\text{ème}}$ *équipe.*

2. Un bibliothécaire doit répartir 420 livres sur des étagères. Chaque étagère doit contenir le même nombre de livres. Est-ce possible avec 18 étagères ? Avec 21 étagères ?

$$\begin{array}{rr|l} & 420 & 18 \\ - & 36 & 23 \\ \hline & 60 & \\ - & 54 & \\ \hline & 6 & \end{array}$$

$420 = 18 \times 23 + 6$, *donc si on met 23 livres sur chaque étagère, il restera 6 livres. Le bibliothécaire ne pourra pas mettre le même nombre de livre sur chaque étagère.*

$420 = 21 \times 20$, *donc si on essaye de répartir 420 livres sur 20 étagères, il y aura 20 livres sur chaque étagères. C'est donc possible de répartir les livres équitablement sur 21 étagères.*

$$\begin{array}{rr|l} & 420 & 21 \\ - & 42 & 20 \\ \hline & 00 & \\ - & 0 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

3. Un garçon de café doit répartir 24 pains au chocolat et 36 croissants dans des corbeilles. Chaque corbeille doit avoir le même contenu. Quelles sont les répartitions possibles ?

Il faut décomposer 36 en produits de la forme : « nombre de corbeilles fois nombre de croissants » et 24 en produits de la forme : « nombres de corbeilles fois nombre de pains au chocolat ».

Pour cela, je vais commencer par décomposer 24 et 36 en facteurs premiers, et regarder ceux qui sont en commun.

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ $\quad 36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$ *il y a deux 2 et un 3 en commun.*
En multipliant entre eux ces deux 2 et ce 3 je peux « fabriquer » les nombres de corbeilles possibles : 2, 3, $4 = 2 \times 2$, $6 = 2 \times 3$ *et* $12 = 2 \times 2 \times 3$.

⋆ *S'il prend 2 corbeilles, il faudra mettre 12 pains au chocolat et 18 croissants dans chaque corbeille car* $24 = 2 \times 12$ *et* $36 = 2 \times 18$.

⋆ *S'il prend 3 corbeilles, il faudra mettre 8 pains au chocolat et 12 croissants dans chaque corbeille car* $24 = 3 \times 8$ *et* $36 = 3 \times 12$.

⋆ *S'il prend 4 corbeilles, il faudra mettre 6 pains au chocolat et 9 croissants dans chaque corbeille car* $24 = 4 \times 6$ *et* $36 = 4 \times 9$.

⋆ *S'il prend 6 corbeilles, il faudra mettre 4 pains au chocolat et 6 croissants dans chaque corbeille car* $24 = 6 \times 4$ *et* $36 = 6 \times 6$.

⋆ *S'il prend 12 corbeilles, il faudra mettre 2 pains au chocolat et 3 croissants dans chaque corbeille car* $24 = 12 \times 2$ *et* $36 = 12 \times 3$.

⋆ *Et n'oublions pas le cas où on met toutes les viennoiseries dans une seule corbeille !*

Exercice n°43 page 132 [Conjecture de Syracuse]