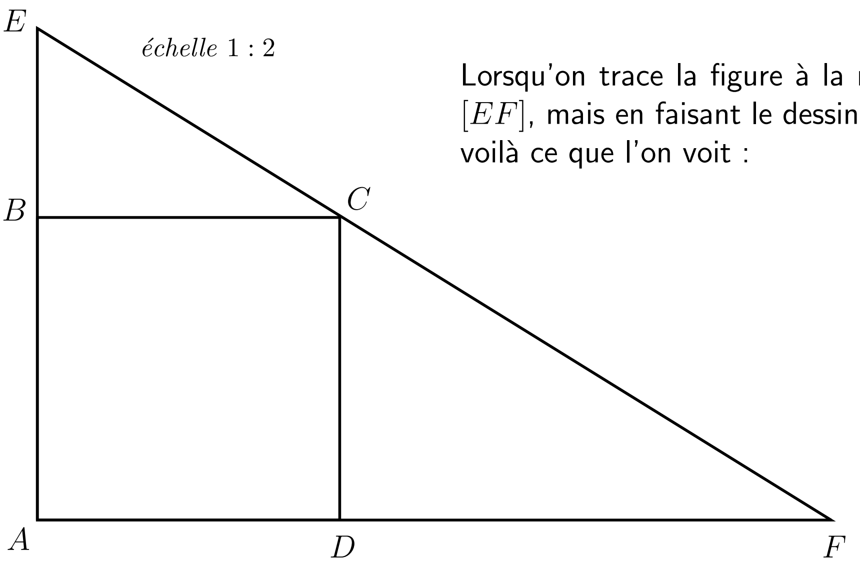
Démontrer en géométrie

I - Introduction : problème d'alignement

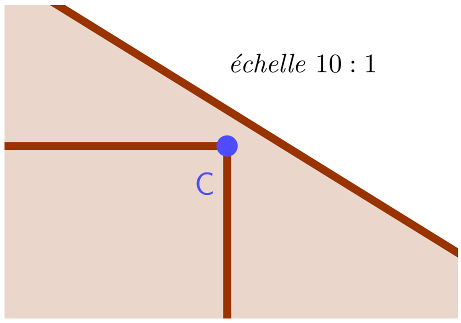
On note $ABCD$ un carré de côté 8 cm. En prolongeant les côtés $[AB]$ et $[AD]$, on trace le triangle AEF tel que :

$AE = 13\,\text{cm}$ $\qquad AF = 21\,\text{cm}$ $\qquad B \in [AE]$ $\qquad D \in [AF]$

Le but du problème est de savoir si le point C est sur le segment $[EF]$ ou non.



Lorsqu'on trace la figure à la main, le point C semble être sur le segment $[EF]$, mais en faisant le dessin sur GeoGebra et en zoomant sur le point C, voilà ce que l'on voit :



Comment aurait-on pu deviner que C n'est pas pile sur $[EF]$ sans utiliser Geogebra ?
Pour cela nous avons vu en groupe qu'il y a plusieurs méthodes.

a. Méthode des aires

En calculant l'aire du triangle AEF, on se rend compte qu'elle n'est pas égale à la somme des aires des triangles EBC et CDF et du carré $ABCD$. Si le point C avait été sur le segment $[EF]$, cette somme aurait dû être égale à l'aire totale !

b. Méthode des longueurs

En utilisant le théorème de Pythagore (voir la méthode en haut à gauche de la page 4), on peut calculer les longueurs EF, EC et CF. On s'aperçoit alors que $EF \neq EC + CF$. Cela montre que $C \notin [EF]$.

c. A retenir

- Quand on fait une démonstration, on doit être **exact**, on ne fait pas d'approximation.
- Ce n'est pas parce qu'on croit voir quelque chose sur le dessin que c'est vrai : **« ça se voit sur le dessin » n'est pas suffisant**, on ne se fie qu'aux informations données par **l'énoncé**.

II - Comment utiliser un théorème ?

a. C'est quoi un théorème ?

Voici la liste des principaux théorèmes vu au cours du cycle 4 :

Théorème (alignement)

- *Si trois points A, B et C sont alignés dans cet ordre, alors $AB + BC = AC$.*
- *En règle générale, pour n'importe quels points A, B et C qui ne sont pas alignés, on a :*

$$AB + BC > AC \qquad (\textbf{inégalité triangulaire})$$

Théorème (Parallélisme)

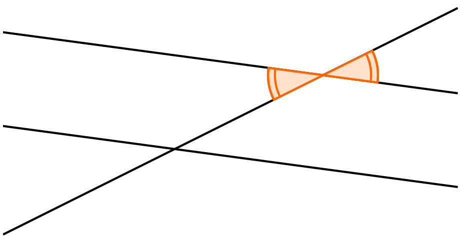
On a trois droites d_1, d_2 et d_3.

Théorème 1 :	*Si*	$d_1 \,//\, d_2$	*et*	$d_1 \,//\, d_3$, *alors*	$d_1 \,//\, d_3$.
Théorème 2 :	*Si*	$d_1 \perp d_2$	*et*	$d_1 \perp d_3$, *alors*	$d_2 \,//\, d_3$.
Théorème 3 :	*Si*	$d_1 \perp d_2$	*et*	$d_1 \,//\, d_3$, *alors*	$d_2 \perp d_3$.

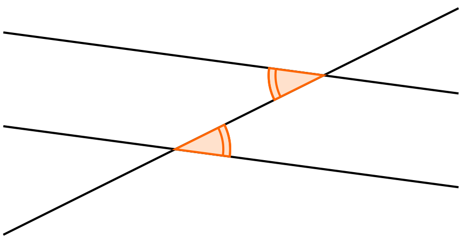
Caractérisation angulaire du parallélisme *:*

- *Si on sait que $d_1 \,//\, d_2$ et que d_3 est une sécante, alors les paires d'angles alternes-internes formés sont de même mesure.*
- *Si des angles alternes-internes formés par les droites d_1 et d_2 et la sécante d_3 sont égaux, alors $d_1 \,//\, d_2$.*

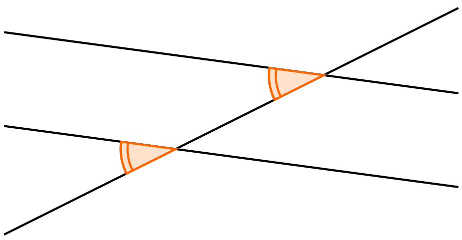
On peut énoncer les mêmes théorèmes en remplaçant « alternes-internes » par « correspondants ».



Opposés par le sommet



Alternes-internes



Correspondants

Propriété d'équidistance de la médiatrice :

- Si la droite d est la médiatrice d'un segment $[AB]$, alors pour n'importe quel point $D \in d$, $AD = BD$.
- L'ensemble des points qui sont à la même distance d'un point A que d'un point B est la médiatrice du segment $[AB]$.

Théorème (triangles)

- *Si une hauteur d'un triangle est confondue avec une médiatrice, alors le triangle est isocèle.*
- *La somme des trois angles d'un triangle est toujours égale à 180°.*
- *Théorème de Pythagore : Si ABC est rectangle en B, alors $AB^2 + BC^2 = AC^2$.*

Théorème (quadrilatères)

- *Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.*
- *Un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme.*

- *Les diagonales d'un rectangle sont de même longueur.*
- *Un parallélogramme dont les diagonales sont de même longueur est un rectangle.*

- *Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires.*
- *Un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange.*

Finalement, un théorème est une affirmation qui est vraie, et qu'on peut souvent mettre sous la forme « **Si** *[conditions]*, **alors** *[conclusions]* ». Il permet à partir des conditions initiales (qu'on appelle hypothèses, et qu'on trouve après le **si**) de **déduire** des conclusions (qu'on trouve après le « **alors** » dans l'énoncé du théorème).

b. Méthode : utiliser un théorème

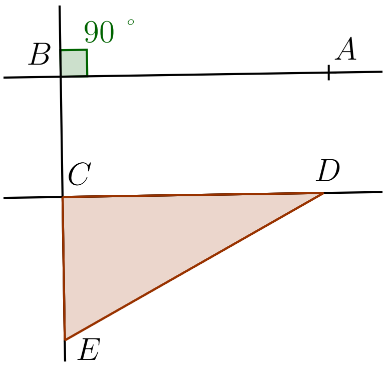
1. On part de **ce qu'on sait** (données de l'énoncé). Les informations que l'on a permettent d'utiliser un théorème **vu dans un cours de maths** quand elles concordent avec ce qui suit le « si » du théorème en question.

2. On nomme le théorème (quand il a un nom)

3. On écrit les conclusions (ce qui se trouve après le « alors » dans le théorème).

Exemples

Premier exemple :



Sur le dessin ci-contre, on sait que $(AB) // (CD)$. Montrer que CDE est triangle rectangle.

Le codage indique que $(BC) \perp (AB)$, et on sait que $(AB) // (CD)$, donc[a] *$(BC) \perp (CD)$.*

L'angle $\widehat{ECD}$ étant droit, on peut en conclure que le triangle CED est rectangle en C.

a. Voir le théorème 3 dans la rubrique parallélisme de la partie suivante.

Deuxième exemple :

Montrer qu'il n'est pas possible de construire un triangle ABC tel que $AB = 5$ cm, $BC = 7$ cm et $AC = 1$ cm.

Pour n'importe quels points A, B et C, l'inégalité triangulaire affirme que

$$AC + AB \geqslant BC$$

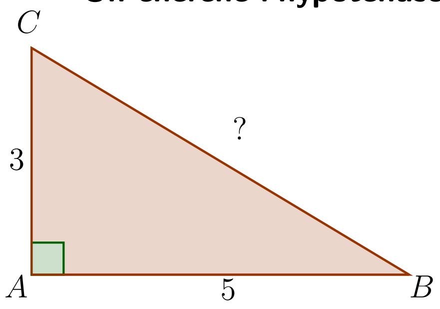
Or, ici on a $AC + AB = 1 + 5 = 6 < 7 = BC$, ce qui contredit l'inégalité triangulaire. On ne peut donc pas construire des tels points.

III - Théorème de Pythagore et réciproque

a. Calculer des valeurs dans un triangle rectangle

Quand un triangle **est <u>rectangle</u>**, on peut utiliser le théorème de Pythagore pour calculer une longueur :

On cherche l'hypoténuse



Comme le triangle est rectangle en A, le théorème de Pythagore me permet d'affirmer que :

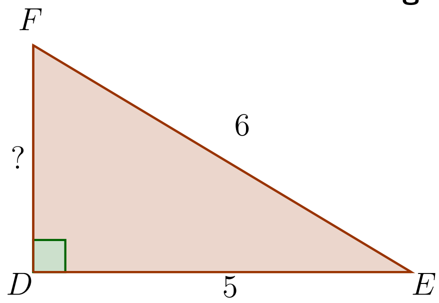
$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Application numérique :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} BC^2 &= 3^2 + 5^2 \\ BC^2 &= 9 + 25 \\ BC^2 &= 34 \end{aligned}$$

On utilise ensuite la touche racine carrée de la calculatrice : $BC = \sqrt{34} \approx 5,831$

On cherche un côté de l'angle droit



Comme le triangle est rectangle en D, le théorème de Pythagore me permet d'affirmer que :

$$FE^2 = FD^2 + DE^2.$$

Application numérique :

$$FE^2 = FD^2 + DE^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 6^2 &= FD^2 + 5^2 \\ 36 &= FD^2 + 25 \end{aligned}$$

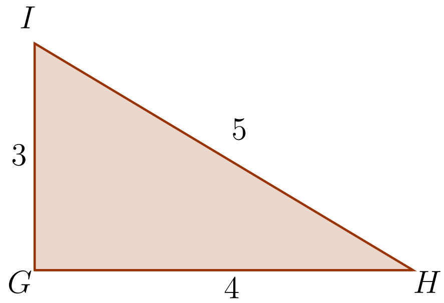
*Jusque là c'était **exactement pareil** qu'à gauche... la différence c'est que maintenant il faut résoudre une équation pour trouver la valeur de FD^2.*

$$\underbrace{36}_{-25} = \underbrace{FD^2 + 25}_{-25}$$

$$11 = FD^2$$

On utilise ensuite la touche racine carrée de la calculatrice : $FD = \sqrt{11} \approx 3,317$

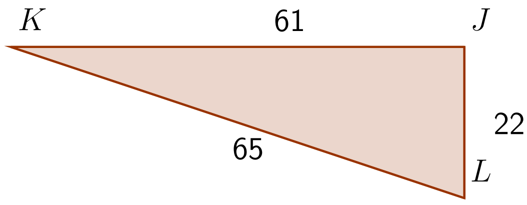
b. Savoir si le triangle est rectangle ou non



On commence à repérer le côté le plus long : si le triangle est rectangle, c'est le côté le plus long l'hypoténuse, c'est celui qui est "tout seul" de son côté du signe égal dans l'égalité de Pythagore.
Le côté le plus long est $IH = 5$. Calculons :

d'une part :	d'autre part :
$IH^2 = 5^2$ $ = 25$	$IG^2 + GH^2 = 3^2 + 4^2$ $ = 9 + 16$ $ = 25$

Ainsi on remarque que l'égalité $IH^2 = IG^2 + GH^2$ est vraie, donc d'après la **réciproque** du théorème de Pythagore, ce triangle est rectangle en G.



Le côté le plus long est $KL = 65$, donc si le triangle était rectangle, ce serait forcément en J. Calculons :

d'une part :	d'autre part :
$KL^2 = 65^2$ $ = 4\,225$	$KJ^2 + JL^2 = 61^2 + 22^2$ $ = 3\,721 + 484$ $ = 4\,205$

On remarque que l'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée, or, si le triangle était rectangle, le théorème de Pythagore affirme qu'elle devrait être vraie ! Le triangle n'est donc pas rectangle.
*C'est ce qu'on appelle la **contraposée** du théorème de Pythagore.*