Factoriser

I - Rappels : le calcul littéral depuis le début

Une expression littérale est une expression mathématique qui contient des opérations ($+$, $-$, $\times$,...), des nombres et une ou des lettres. Ces lettres représentent des nombres :

- soit des **inconnues** (valeur que l'on ne connaît pas) *Exemple : dans des équations*
- soit des **variables** (valeur qui peut changer). *Exemple : dans des fonctions*

Simplifications d'écriture :

$\star$ $5 \times x$ s'écrit tout simplement $5x$ $\star$ $6 \times a \times a$ s'écrit $6a^2$

$\star$ $(5 + 2 \times y) \times 8$ s'écrit $8(5 + 2y)$ (on lit "8 **facteur de** 5 plus 2 y")

On ne peut pas simplfier certaines expressions (par exemple $9x + 2$). Parfois, la réponse à un problème va donc être une expression littérale complète. On peut par contre regrouper les termes qui contiennent la même lettre (on appelle ça **réduire**) : $2x - 5 + 3y - 3x + y - 12 = -x + (-17) + 4y$

Développer :
Transformer
un produit ($\times$)
en somme ($+$).

Développer

$$\bigstar \times (\spadesuit + \clubsuit) = \underline{\bigstar \times \spadesuit} + \underline{\bigstar \times \clubsuit}$$

Factoriser

Factoriser :
Transformer
une somme ($+$)
en produit ($\times$) .

Distributivité double :

$$(5 + 3x)(2x + 4) = 5 \times 2x + 3x \times 2x + 5 \times 4 + 3x \times 4$$

Certaines égalités sont toujours vraies :

- quand on simplifie/réduit
- quand on applique une propriété (distributivité...)

On les appelle les **identités**.

D'autres sont parfois vraies, parfois fausses :

- quand on résoud une équation : l'égalité n'est vraie que si la valeur de x est une solutions de l'équation. Si on essaye avec une valeur qui n'est pas solution, l'égalité sera fausse.

Exercice n°47 et 48 page 149

II - Facteur commun

Pour pourvoir factoriser dans des cas simples, il faut que l'expression ait un **facteur commun**.

- Facteur : nombre qui est multiplié
- Commun : on retrouve le même dans différents termes.

Exemples

Factoriser les expressions suivantes :

- $5x+25 = 5x+5\times 5 = 5(x+5)$
- $3x^2-6x = 3x\times x - 3x\times 2 = 3x(x-2)$

Exercice n°22 page 147 et 36 page 148

III - Identités remarquables

Lorsqu'on utilise la distributivité double, l'expression développée obtenir n'a pas de facteur commun. Pourtant on peut la factoriser puisqu'on peut remonter les étapes du développement !

En règle générale, on ne peut pas faire marche arrière sur l'étape de réduction, donc on ne peut pas factoriser n'importe quelle expression.

Mais...

il y en a certaines qui sont faciles à repérer. On les appelle les **identités remarquables**.

a. Par le calcul

1. Développer et réduire les expressions suivantes.

   (a) $(6x-3)(6x+3)$ (b) $(3-x)(3+x)$ (c) $(x+y)(x-y)$

2. Que remarque-t-on ?
3. Factoriser l'expression $81-x^2$.

En apprenant par cœur cette formule (identité remarquable) : $\boxed{a^2-b^2=(a+b)(a-b)}$

on peut factoriser certaines expressions.

Remarque

- $(a+b)(a-b)=(a-b)(a+b)$ *et* $(a+b)(a-b)=(b+a)(a-b)$ *: l'ordre des signes ou des termes n'a pas d'importance.*
- $a^2-b^2\neq b^2-a^2$ *attention par contre aux différences dans lesquelles l'ordre compte !*

Exercice : cliquez ici et ici

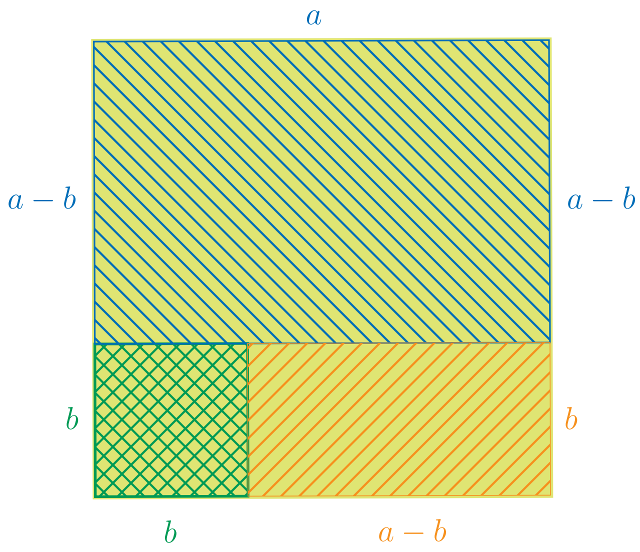
b. Géométriquement

L'expression a^2 correspond à l'aire d'un carré de côté a (colorié en jaune-vert sur le dessin ci-contre).
L'expression b^2 correspond à l'aire d'un carré de côté b (hachuré dans les les deux sens en vert sur le dessin ci-contre).

La différence $a^2 - b^2$ correspond donc à la somme des zones hachurées en bleu et en orange.

$$a^2 - b^2 = a(a-b) + b(a-b)$$

On remarque un facteur commun :
$a^2 - b^2 = a(a-b) + b(a-b) = (a-b)(a+b)$
On retrouve donc la même identité remarquable !



Retrouvez toutes ces explications dans une animation sur géogébra : https ://www.geogebra.org/m/wD93Newk.

Exercice : cliquez ici

[Hors programme]

Il existe deux autres identités remarquables :

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \quad \text{et} \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

qui ne sont plus au programme, mais dont vous aurez peut être besoin au lycée.

Exercice n°40 page 148

IV - Pourquoi factoriser ? (équations produit nul)

Les produits dont un des facteurs est égal à zéro ont une propriété assez utile :

- $0 \times 2 = 0$
- $-6,3 \times 0 = 0$
- $0 \times \left(\frac{8}{7} + 29\right) = 0$
- $(5x-3) \times 0 = 0$

Zéro multiplié par n'importe quel nombre donnera toujours zéro.

Et cela caractérise un produit nul : il n'y a aucun autre nombre que zéro qui permet d'obtenir zéro en le multipliant. Par conséquent, quand on a une équation du type :

$$(x-5)(3x+1) = 0$$

pour que le produit soit égal à zéro, un des deux facteurs doit être égal à zéro, c'est à dire :

$$x - 5 = 0 \quad \text{ou} \quad 3x - 1 = 0$$

On peut donc résoudre cette équation :

$$x = 5 \quad \text{ou} \quad 3x = 1$$
$$x = 5 \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{3}$$

L'équation $(x-5)(3x+1) = 0$ a donc deux solutions : $x_1 = 5$ et $x_2 = \frac{1}{3}$.

Cette façon de présenter permet de ne pas oublier de solutions. En effet, lorsqu'on a une équation de la forme $x^2 = 81$, on a envie de donner tout de suite la réponse $x = 9$, alors qu'**il y a une deuxième solution** : $x = -9$.

$$\begin{array}{lllllll} x^2 = 81 & \Leftrightarrow & x^2 - 81 = 0 & \Leftrightarrow & x^2 - 9^2 = 0 & \Leftrightarrow & (x-9)(x+9) = 0 \\ & \Leftrightarrow & x - 9 = 0 \quad \text{ou} \quad x + 9 = 0 & \Leftrightarrow & x = 9 \quad \text{ou} \quad x = -9 & & \end{array}$$

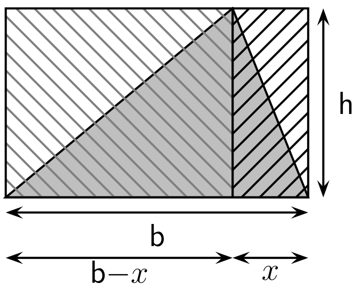
Exercice : cliquez ici

V - Démontrer la formule de l'aire d'un triangle

Nous connaissons la formule de l'aire du triangle :

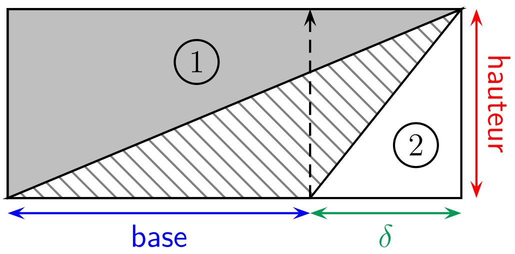
$$\boxed{\mathscr{A}_{\text{triangle}} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}}$$

Exercice : Démontrer la formule dans le cas où la hauteur est dans le triangle.



La formule de l'aire du triangle fonctionne-t-elle toujours avec les triangles « Tour de Pise » (c'est à dire les triangles dont la hauteur est à l'extérieur du triangle) ?

On cherche à déterminer l'aire du triangle hachuré.



L'aire 1 est égale à la moitié du grand rectangle, c'est à dire $\dfrac{(b+\delta) \times h}{2}$

L'aire 2 est égale à la moitié du petit rectangle de droite, c'est à dire $\dfrac{\delta \times h}{2}$

Ainsi, l'aire du triangle est égale à l'aire du grand rectangle moins l'aire 1 et l'aire 2 :

$$\begin{array}{lll} \mathscr{A}_{\text{triangle}} & = & (b+\delta) \times h - \dfrac{(b+\delta) \times h}{2} - \dfrac{\delta \times h}{2} \\ & = & h \times \left(\underbrace{(b+\delta) - \dfrac{(b+\delta)}{2}} - \dfrac{\delta}{2} \right) \qquad \text{On factorise par } h \\ & = & h \times \left(\dfrac{(b+\delta)}{2} - \dfrac{\delta}{2} \right) \qquad \text{Un nombre moins sa moitié est égale à sa moitié} \\ & = & h \times \left(\dfrac{b}{2} \underbrace{+ \dfrac{\delta}{2} - \dfrac{\delta}{2}} \right) \\ & = & h \times \left(\dfrac{b}{2} + 0 \right) \\ \mathscr{A}_{\text{triangle}} & = & \dfrac{h \times b}{2} \end{array}$$

Cela correspond bien à la formule !