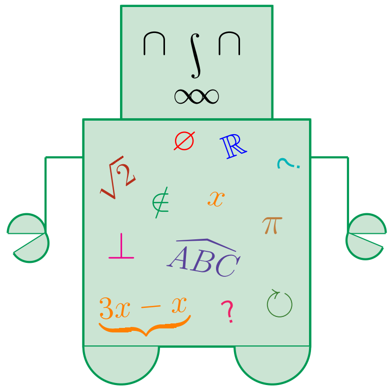
Mme Toromanoff

Collège Jean Mermoz
3ème

Notion de fonction

I - Introduction : boîtes à calculs

Voici `Heff`, le robot mathématique.

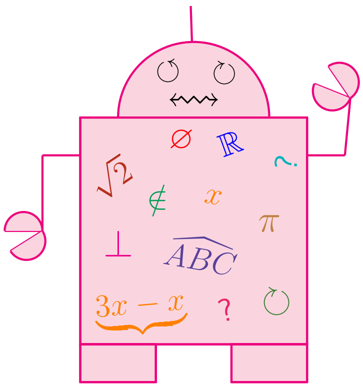


Donnez un nombre à `Heff` et il vous en donnera un autre... Mais saurez-vous retrouver le lien logique entre le nombre que vous lui donnez et celui qui vous répond ?

Si je dis au robot...	il me répond...
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
2,5	6,25

Avez-vous trouvé comment fonctionne ce robot ? Si je lui dis 1,5 que me répondra-t-il ?

Voici `Jey`, le copain de `Heff`.



Lui aussi répond un nombre à chaque fois qu'on lui dit un nombre. Mais il ne donne pas les mêmes réponses que `Heff`... Trouverez-vous comment il fonctionne ?

Si je dis au robot...	il me répond...
0	5
1	7
2	9
3	11
2,5	10
1,1	7,2

Ces machines qui reçoivent un nombre et en calculent un autre s'appellent les **fonctions**. On dit qu'une fonction **associe** un nombre à un autre.

La flèche « $\longmapsto$ » permet de noter les associations que font les fonctions. Par exemple ici on a :

$$\texttt{Heff} : 0 \longmapsto 0 \quad \text{alors que} \quad \texttt{Jey} : 0 \longmapsto 5$$

Ces fonctions réalisent une association pour n'importe quel nombre. C'est donc assez naturellement qu'on va utiliser x pour « expliquer » une fonction :

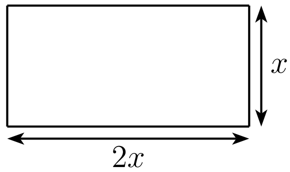
$$\texttt{Heff} : x \longmapsto x^2 \qquad \text{et} \qquad \texttt{Jey} : x \longmapsto 2x + 5$$

Trouver l'expression d'une fonction dans ce contexte est un exercice difficile qu'on ne vous demande pas de savoir faire. C'est juste un exemple.

II - « En fonction de »

Vous avez déjà vu des énoncés d'exercices utilisant le mot fonction. Par exemple :

> Un rectangle a pour largeur x cm et pour longueur le double de sa largeur. Exprimez le périmètre de ce rectangle en **fonction** de x.



Résolvons cet exercice : la longueur du rectangle en fonction de x cm serait égale à $2x$ cm (le double de x), donc le périmètre est : $\mathscr{P} = x + 2x + x + 2x = 6x$ cm.

Comme la valeur de $\mathscr{P}$ change quand la valeur de x change, les mathématiciens ont décidé de le noter ainsi :

$$\mathscr{P}(x) = 6x$$

> « $\mathscr{P}(x)$ » se lit « P **de** x »

Le x entre parenthèse n'est pas une opération mais juste une notation pour dire que la valeur du périmètre dépend de la valeur de x.

« $\mathscr{P}(x)$ » est la **valeur** du périmètre en fonction de x alors « $\mathscr{P}$ » est la **fonction**.

On peut noter aussi :

$$\mathscr{P} : x \longmapsto 6x$$

Par exemple si on donne à la machine $\mathscr{P}$ la valeur $x = 1$, alors cette machine va calculer le périmètre du rectangle qui a pour dimensions 1 cm par 2 cm :

$$\mathscr{P}(1) = 6 \times 1 = 6 \quad \text{ou encore} \quad \mathscr{P} : 1 \longmapsto 6$$

Finalement, pour définir une fonctions, il y a deux écritures équivalentes :

$$\boxed{f : x \longmapsto x^2 - 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) = x^2 - 4}$$

Exercices n°27 page 273 et n°37 page 276 (en anglais)

III - Vocabulaire et notations

Lorsqu'on définie par exemple la fonction $f : x \longmapsto x^2 - 4$ (ou $f(x) = x^2 - 4$ pour tout nombre x), l'expression littérale $x^2 - 4$ s'appelle **l'expression de la fonction** f (on dit aussi « terme général » de la fonction.

Ces notations signifient qu'à un nombre x, la fonction f associe le nombre $x^2 - 4$ (à calculer suivant la valeur de x).

Par exemple ici, si on remplace x par 3 on obtient $3^2 - 4 = 5$, ce qu'on note $f(3) = 5$.

Lorsqu'on vous demande de **calculer l'image de** 3 **par la fonction** f, il faut remplacer x par 3. Le résultat du calcul correspond à ce que le robot nous répond quand on lui donne le nombre 3.

> $f : 3 \longmapsto 5 \quad \Leftrightarrow \quad f(3) = 5 \quad \Leftrightarrow$ **l'image** de 3 par f est 5

Remarques :

- Lorsqu'on remplace x par un nombre, on le fait à **tous** les endroits où il y a x, donc après, il n'y a plus de x !
- La lettre f est le **nom** de la fonction (vous pouvez imaginer le robot), alors que $f(x)$ est un nombre (l'image de x par f) qu'on peut calculer quand x a une valeur donnée.

Imaginons que le robot (la fonction f) est en train de me dire « 6 ». Je voudrais savoir quel est le nombre qui a été donné au robot pour qu'il réponde « 6 ».

Nous sommes alors en train de faire marcher la fonction à l'envers, un peu comme quand on remonte un programme de calcul.

On dit alors qu'on recherche un ou des **antécédent(s)** de 6 par la fonction f.

Comme dans « antécédents médicaux » ou « antécédents judiciaires », le mot antécédent désigne ce qui s'est passé ***avant****.*

$f : x \longmapsto ?$

image de x par f

$f : ? \longmapsto y$

antécédent de y par f

Remarque : Attention au français ! Les phrases qui utilisent les mots « image » et « antécédent » peuvent être compliquées. Par exemple, les affirmations suivantes sont toutes équivalentes :

- $f(3) = 5$
- L'image de 3 par f est 5.
- 3 a pour image 5 par f.
- 3 est un antécédent de 5 par f.
- 5 a pour antécédent 3 par f.

Conseils :
→ Épurez la phrase pour bien identifier qui est l'image (ou l'antécédent)
→ Transformer la voie passive en voie active

Par exemple « L'image (de 3 par f) est 5 »

« 5 a pour antécédent 3 (par f) »
↪ « 3 est l'antécédent de 5 (par f) »

Remarque

Par définition, une fonction associe **une** *image à un nombre. Il n'y en a toujours qu'une seule, c'est pourquoi on peut demander « Calculer* **l'***image de ... ».*

Pour les antécédents, c'est bien différents ! Pour une valeur donnée il peut y avoir plusieurs antécédents, mais il peut aussi ne pas en avoir du tout.

Exemple :
Par la fonction $f : x \longmapsto x^2 + 1$, les images sont toutes plus grandes que 1.

$$f(-3) = (-3)^2 + 1 = 9 + 1 = 10 \qquad f(0) = (0)^2 + 1 = 0 + 1 = 1$$
$$f(-2) = (-2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5 \qquad f(1,1) = 1,1^2 + 1 = 1,21 + 1 = 2,21$$

À la question « Trouver un antécédent de -1 par f »
la réponse est « Impossible : il n'y en a pas ! ».

Par contre, si on me demande « Trouver **le(s)** *antécédent(s) de 37 par f. »,*
la réponse est « Il y en a deux : 6 et -6,
en effet $f(6) = 6^2 + 1 = 36 + 1 = 37$ et $f(-6) = (-6)^2 + 1 = 36 + 1 = 37$. »

Vocabulaire et notations : n°20, 21 et 24 page 273

IV - Exemples types

a. Calculs d'images

La fonction f est définie pour tout nombre x par $f(x) = \dfrac{x^2-1}{2}$.

a) Vrai ou faux ?
« $f(0) = -0,5$ signifie que l'image de $-0,5$ est 0. »

b) Calculer l'image de (-1) par f.

c) Calculer $f(0,5)$.

Attention

$$(-1)^2 = (-1) \times (-1) = 1$$
$$\neq$$
$$-1^2 = -1 \times 1 = -1$$

a) Faux : « $f(0) = -0,5$ signifie que l'image de 0 est $-0,5$, ou encore que 0 a pour image $-0,5$. »

b) $f(-1) = \dfrac{(-1)^2-1}{2} = \dfrac{1-1}{2} = \dfrac{0}{2} = 0$ L'image de (-1) par f est zéro.

c) $f(0,5) = \dfrac{(0,5)^2-1}{2} = \dfrac{0,25-1}{2} = \dfrac{-0,75}{2} = -0,375$

b. Recherche d'antécédents

On considère la fonction $g : x \longmapsto 3 - x$.

a) Vrai ou faux ? « 3 est un antécédent de 6 par f »

b) Trouver le ou les antécédents de 7 par f.

a) $g(3) = 3 - 3 = 0$ donc l'affirmation est fausse.

b) On cherche un nombre $\bigstar$ tel que $g(\bigstar) = 7$:

$$\begin{aligned} 3 - \bigstar &= 7 \\ 3 + (-\bigstar) &= 7 \\ 3 + (-\bigstar) - 3 &= 7 - 3 \\ (-\bigstar) &= 4 \\ \bigstar &= -4 \end{aligned}$$

Vérification : $g(-4) = 3 - (-4) = 3 + 4 = 7$

Remarque : Il arrive qu'il y ait plusieurs antécédents pour un même nombre.
Par exemple avec la fonction $h : x \longmapsto x^2 - 4$, on a :

- $h(2) = 2^2 - 4 = 4 - 4 = 0$
- $h(-2) = (-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$

Le nombre zéro a 2 et (-2) pour antécédent par la fonction h.
Nous apprendrons à trouver ces antécédents multiples dans un autre chapitre.

V - Tableaux de valeurs

Pour avoir une vue d'ensemble sur une fonction, on peut faire un tableau dans lequel on choisit différentes valeurs de x et on calcule leurs images. On appelle cela un **tableau de valeur de la fonction**.

Exemple

Pour la fonction $h : x \longmapsto x^2 - 4$, prenons comme valeurs de x des nombres entiers consécutifs en partant de (-2) :

On calcule :

$h(-2) = (-2)^2 - 4 = 0$
$h(-1) = (-1)^2 - 4 = 1 - 4 = -3$
$h(0) = (0)^2 - 4 = -4$

$h(1) = 1^2 - 4 = -3$
$h(2) = 2^2 - 4 = 0$
$h(3) = 3^2 - 4 = 9 - 4 = 5$

Enfin on reporte ces informations dans un tableau :

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0	-3	-4	-3	0	5

Remarque : On peut réaliser rapidement un tableau de valeurs avec un tableur.

Exemple

B2 | f_x Σ = | =A2*A2-3*A2+7

	A	B	C
1	x	f(x)	g(x)
2	0	7	
3	1		
4	2		
5	3		
6	4		
7	5		
8	6		
9	7		
10	8		
11	9		
12	10		

1. *Dans a feuille de calcul ci-contre, la formule qui a été entrée dans la cellule* B2 *est* `=A2*A2−3*A2+7`*. En étirant sur la colonne* B*, on obtiendra un tableau de valeurs d'une fonction f.*

   Donner l'expression de la fonction f (en fonction de x).

2. *On veut de la même manière réaliser un tableau de valeur pour la fonction $g : x \longmapsto (x-1)(3+x)$ dans la colonne* C*.*

   Quelle formule peut-on écrire dans la cellule C2 *et étirer sur la colonne* C *pour obtenir ce tableau de valeur ?*

1. *La formule « =A2*A2-3*A2+7 » correspond à l'expression littérale « $x \times x - 3 \times x + 7$ » donc la fonction f est définie par $f(x) = x^2 - 3x + 7$.*
2. *La formule tableur correspondant à l'expression littérale « $(x-1)(3+x)$ » est « =(A2-1)*(3+A2) ».*

Remarques :

- Il faut impérativement mettre le * entre les deux parenthèses car le tableur ne sait pas qu'on peut sous-entendre les signes $\times$.
- On aurait pu également utiliser l'expression développée de $g(x)$:

$$\begin{aligned}(x\ -1)\ \ (3\ +x) &= x \times 3 + x \times x + (-1) \times 3 + (-1) \times x \\ &= 3x + x^2 - 3 - x = \boxed{x^2 + 2x - 3}\end{aligned}$$

La formule tableur serait alors « =A2*A2+2*A2-3 ».

Tableau de valeur : n°23 page 273