

Homothéties

I - Propriétés

Toutes les transformations qu'on a vu jusqu'à maintenant (symétrie axiale, symétrie centrale, translation, rotation) conservent :

- les longueurs
- les angles

Cela signifie que si $AB = 5$ cm, le symétrique du segment $[AB]$ mesure aussi 5 cm ; ou encore si le triangle ABC est rectangle en C, son image A'B'C' sera rectangle en C'.

C'est ce qu'on appelle des transformations **isométriques**.

La transformation que nous allons voir dans ce chapitre a la particularité qu'elle **n'est pas** une isométrie.

II - Homothétie

Une homothétie a deux paramètres : un point appelé le **centre** de l'homothétie, et un nombre appelé le **rapport** de l'homothétie.

a. Rapport positif

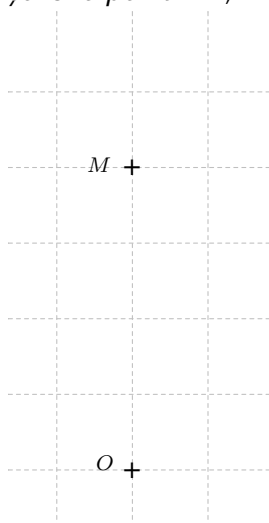
Définition

L'image du point M par l'homothétie de centre O et de rapport n (n est un nombre positif) est le point M' de la demi-droite $[OM)$ tel que $OM' = nOM$.

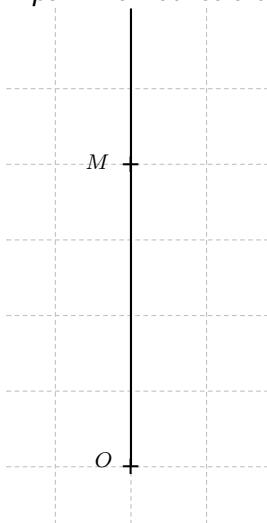
Autrement dit, pour trouver l'image M' d'un point M par une homothétie, on trace la demi-droite $[OM)$, on mesure la longueur OM , on la multiplie par n , puis on place le point M' sur la demi-droite $[OM)$ à la distance calculée du point O .

Exemple

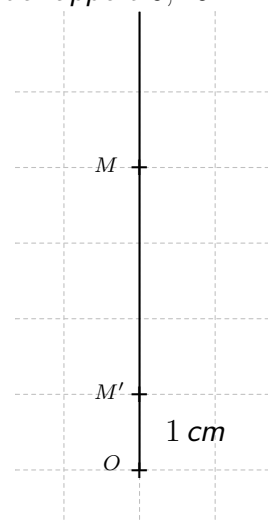
Traçons le point M' , image du point M par l'homothétie de centre O et de rapport 0,25 :



OM mesure 4 cm.



On calcule : $0,25 \times 4 = 1$

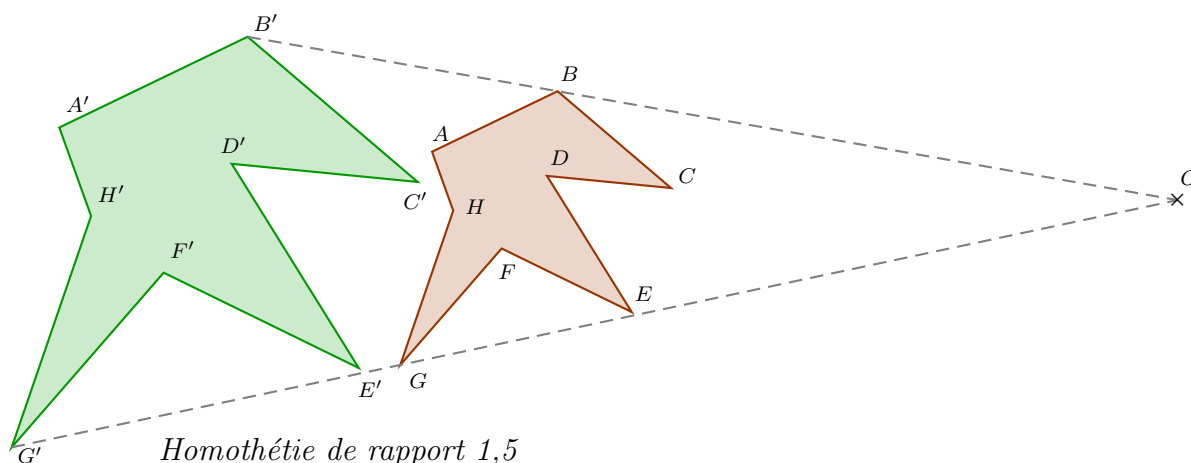


donc $OM' = 1$ cm

Construction animée

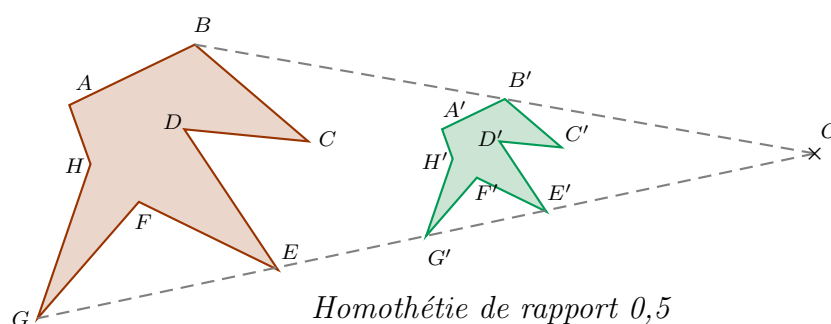
Remarque

- Lorsqu'on multiplie une longueur par un nombre supérieur à 1, le résultat est plus grand que le nombre de départ, donc l'image par une homothétie de rapport supérieur à 1 éloigne l'image du centre.



On effectue donc un **agrandissement**.

- Lorsqu'on multiplie une longueur par un nombre compris entre 0 et 1, le résultat est plus petit que le nombre de départ, donc l'image par une homothétie de rapport compris entre 0 et 1 rapproche l'image du centre.



On effectue donc une **réduction**.

Pour visualiser l'effet d'une homothétie sur différents objets : cliquez [ici](#).

Pour visualiser l'image d'objets par une homothétie dont on choisi le coefficient avec un curseur :

- Triangle
- Carré

Remarques

- Une homothétie de rapport 1 laisse la figure exactement au même endroit : c'est comme si on n'appliquait aucune transformation.
- Une homothétie de rapport 0 a toujours pour image un seul point : le centre de l'homothétie.

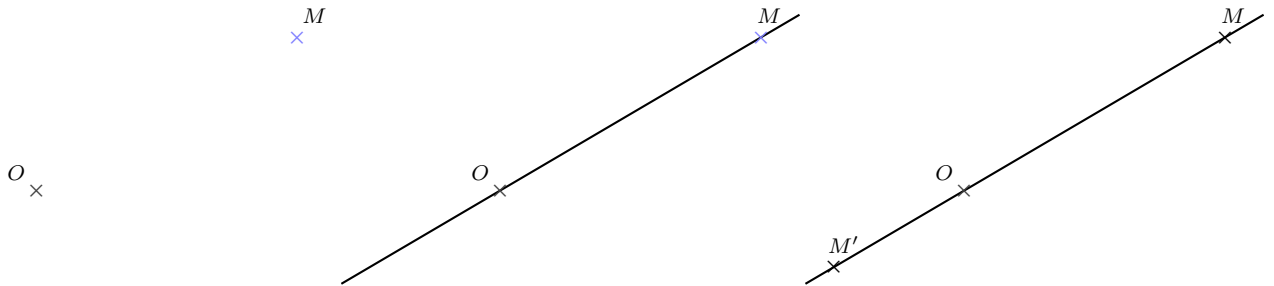
Exercices n°11, 12 et 13 page 377 Corrigés
Exercice n° 15 page 379 (corrigé dans le livre)
Exercices n°40, 41 et 43 page 383

b. Rapport négatif

C'est exactement comme les rapports positifs, sauf qu'au lieu d'être du même côté que le point de départ, l'image est cette fois-ci de l'autre côté par rapport au centre de l'homothétie.

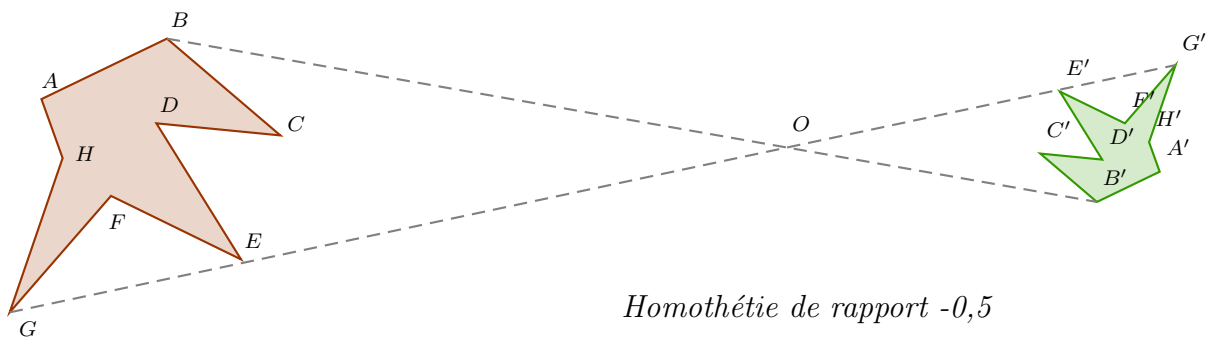
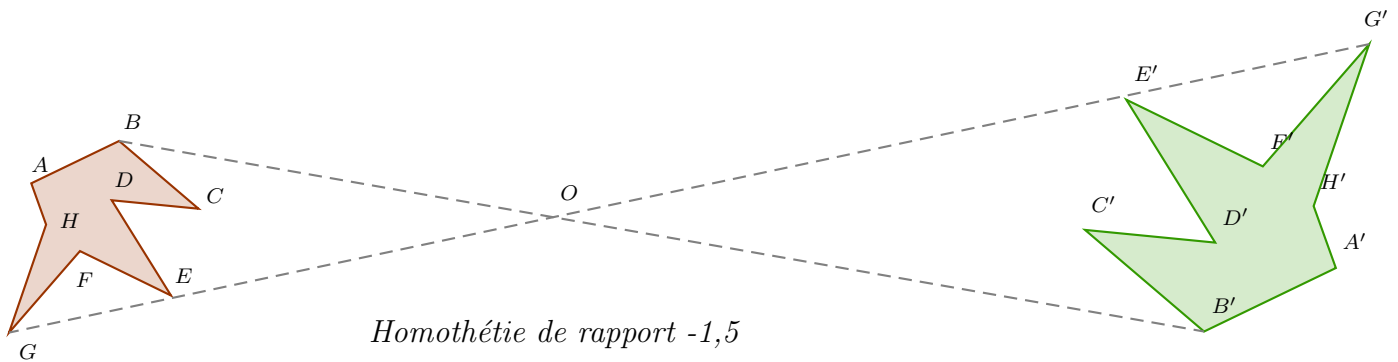
Exemple

Traçons l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport $-0,5$:



On sait que $OM = 4 \text{ cm}$. On calcule $0,5 \times 4 = 2$. On place M' de l'autre côté de O en mesurant 2 cm .

Finalement, effectuer une homothétie de rapport négatif revient à effectuer l'homothétie de rapport opposé, puis une symétrie centrale.



Homothétie d'un hexagone animé

Remarque

Une homothétie de rapport -1 est une symétrie centrale !

c. Exemples concrets d'homothéties

La construction d'une image par une homothétie peut paraître compliquée, mais en fait, on la trouve naturellement :

- Dans toutes les situations de Thalès (« triangles imbriqués » pour les rapports positifs, et « papillon » pour les rapports négatifs)
- pour représenter un agrandissement ou une réduction.
- en optique : C'est une homothétie qui permet de décrire les rayons de lumière qui passent dans une lentille (dans un appareil photo, ou une chambre noire par exemple).

*Pour vérifier que vous avez retenu les notions principales du chapitre : QCM page 384
ou : Exercices auto-correctifs sur les homothéties*

Sinon un cours complet constitué de vidéos et d'exercices auto-correctifs sur geogebra [ici](#)