

Probabilités

I - Introduction et rappels

Dans le langage courant, on utilise l'expression « c'est probable » quand on est assez confiant sur le fait que ça va arriver, mais on n'en est pas sûr : il y a du hasard.

Le mot hasard vient de l'arabe *āz-zāhr*, en transitant par l'espagnol et signifiait à l'origine « dés » (ou la fleur dessinée sur l'une des faces du dé). Le mot aléatoire vient du mot latin *alea* qui désignait déjà à la fois le dé, le jeu de dés et le hasard.

En mathématiques on va parler de **probabilités** dès qu'on a une **expérience aléatoire**, c'est à dire un jeu de hasard (lancer un dé, tirer une carte, choisir un élève au hasard pour passer au tableau, etc.).

Prenons pour exemple l'expérience aléatoire : « Lancer un dé ».

Les résultats possibles sont :  ou 

On est sûr de trouver un de ces résultats, mais **on ne peut pas savoir** lequel **avant d'avoir lancé le dé**. On peut chiffrer la « chance » d'obtenir un certain résultat : c'est ce qu'on appelle la **probabilité**.

Par exemple ici, la probabilité de faire  est de $\frac{1}{6} \approx 0,66$ ou encore environ 66%.

II - Vocabulaire

Définition

Une expérience est dite **aléatoire** lorsqu'on sait à l'avance quels sont les résultats possibles (qu'on appelle les **issues** de l'expérience), mais qu'**on ne sait pas à l'avance** lequel on obtiendra.

Exemples

★ Considérons l'expérience aléatoire : « Jeter une pièce. »

Les issues possibles sont « pile » et « face », mais je ne sais pas à l'avance si je vais obtenir pile ou face.

★ Autre exemple : « Tirer une carte ».

Dans un jeu classique il y a 52 cartes (As, roi, dame, valet, puis du 10 jusqu'au 2 [ça fait 13], dans 4 couleurs différentes : ♠ pique, ♥ cœur, ♦ carreau et ♣ trèfle [$13 \times 4 = 52$]). Il y a donc 52 issues possibles qui correspondent à chaque carte. Je sais que je vais tirer une des ces 52 cartes, mais je ne sais pas à l'avance laquelle je vais tirer.

Définition

Un **évènement** est un ensemble d'issues d'une expérience aléatoire.

Exemple

Par exemple si je lance un dé, je peux considérer l'évènement « j'obtiens un nombre pair » : il est composé des issues 2, 4 et 6.

Définitions

La **probabilité** d'un évènement est un **nombre compris entre 0 et 1** qui exprime les chances que l'évènement se produise.

Avec une probabilité égale à zéro, il n'y a aucune chance que l'évènement se produise.

C'est l'évènement **impossible**.

Avec une probabilité égale à un, on est sûr à 100% que l'évènement va se produire ($1 = \frac{100}{100} = 100\%$).

C'est l'évènement **certain**.

Exemple

Lorsqu'on lance une pièce, il y a une chance sur 2 de faire pile et une chance sur 2 de faire face. La probabilité de tomber sur pile est donc $\frac{1}{2} = 0,5$ (elle est égale à la probabilité de tomber sur face).

III - Calculer des probabilités : lien avec les effectifs

En 3^e3, il y a 12 filles et 9 garçons. Si on tire un élève au hasard dans la classe, il y aura 9 chances sur 21 que ce soit un garçon. La probabilité de l'évènement « L'élève tiré au hasard est un garçon » est donc $\frac{9}{21} \approx 0,43 = 43\%$.

D'une manière générale, quand on tire au hasard un individu dans une population statistique, la probabilité d'un évènement est égale à sa fréquence. Pour la calculer je fais donc :

$$\frac{\text{effectif de l'évènement}}{\text{effectif total}}$$

Exemple : retrouver ce qu'il faut écrire dans l'espace vide du script suivant.

quand  est cliqué

demander (Combien y a-t-il de filles dans ta classe ?) et attendre

mettre nb_filles ▾ à réponse

demander (Combien y a-t-il de garçons dans ta classe ?) et attendre

mettre nb_garçons ▾ à réponse

mettre proba ▾ à

dire regrouper (Il y a) et regrouper (proba) et (% de chances de tirer un garçon.)

L'effectif total de la classe est nb_filles + nb_garçons donc la probabilité de tirer un garçon est :

$$\text{nb_garçons} / \text{nb_filles} + \text{nb_garçons}$$

Il faut ensuite mettre ce résultat en pourcentage (en le multipliant par 100) :

$$\text{nb_garçons} / \text{nb_filles} + \text{nb_garçons} * 100$$

IV - Simuler une expérience aléatoire

a. Tableur

On peut simuler des expériences aléatoires sur un tableur grâce aux commandes :

- `ALEA()` qui renvoie un nombre aléatoire compris entre 0 et 1
- `ALEA.ENTRE.BORNES( $x_1$ ;  $x_2$ )` qui renvoie un nombre entier aléatoire compris entre les valeurs x_1 et x_2 spécifiées par l'utilisateur.

Exemples

- Pour simuler un lancé de dé équilibré à 6 faces, on peut écrire la formule `=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)`
- Pour simuler un pile ou face, on peut décider à l'avance que pile sera 0 et face 1 (par exemple), puis entrer la formule `=ALEA.ENTRE.BORNES(0;1)`

Astuce : Utilisez la poignée de copie (étirer) pour faire rapidement un très grand nombre de tirages !

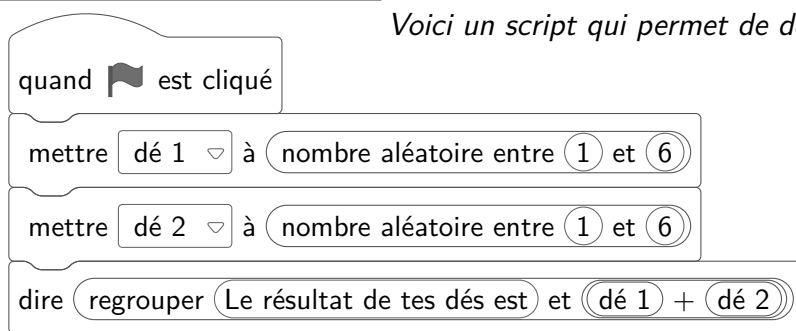
b. Scratch

On peut simuler une expérience aléatoire sur scratch grâce à la commande **nombre aléatoire entre** et qui donne un nombre entier aléatoire compris en les deux valeurs indiquée (incluses).

On la trouve dans l'onglet « Opérateurs ».

Exemple (Somme de deux dés)

Voici un script qui permet de donner le résultat de la somme de deux dés.



V - Stabilisation des fréquences

Lorsqu'on répète une expérience aléatoire, on obtient une série statistique : chaque issue de l'expérience apparaît un certain nombre de fois (c'est l'**effectif** de chaque issue). On peut donc calculer la **fréquence** associée à chaque issue (c'est l'effectif de cette issue divisée par l'effectif total).

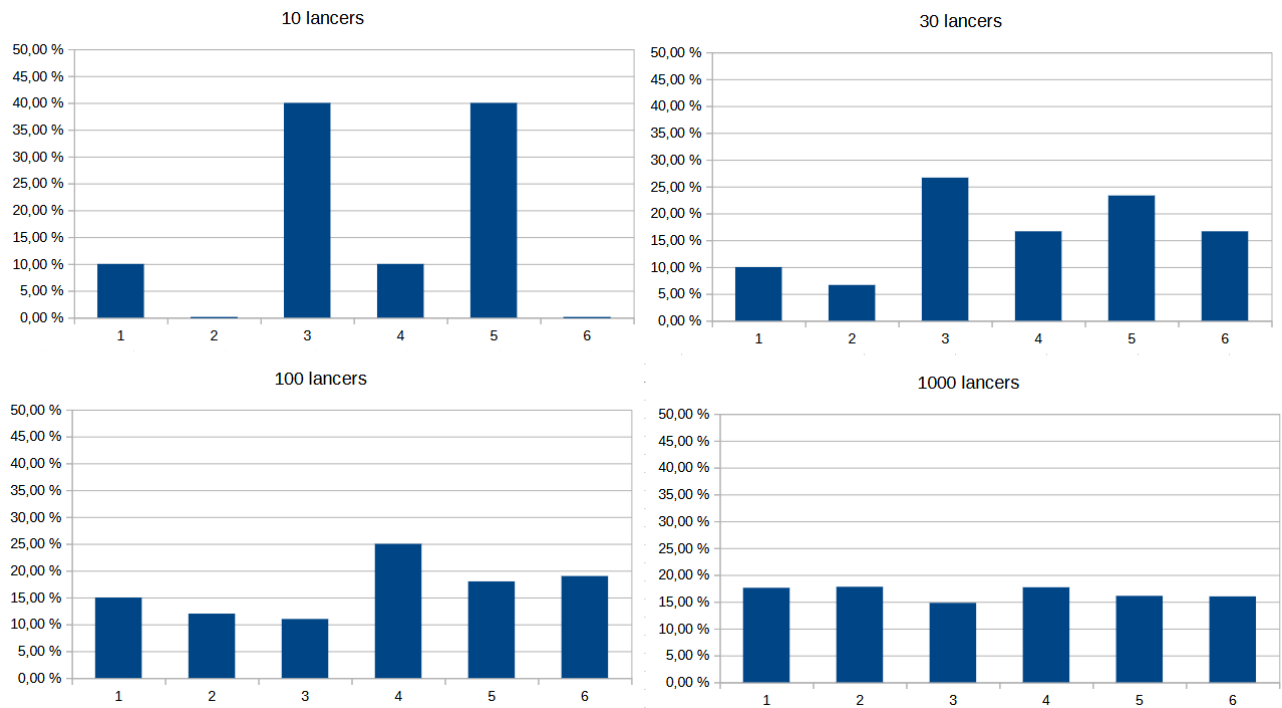
Exemple

Pour l'expérience aléatoire « Je lance un dé équilibré à 6 faces », la probabilité de chaque issue est égale à $\frac{1}{6} \approx 0,167 = 16,7\%$.

J'ai simulé sur un tableur 10, puis 30 puis 100 puis 1 000 lancers des dés.

Pour chaque simulation j'ai demandé au tableur de calculer les fréquences obtenues pour chaque face du dé.

Voici ce qu'on obtient :



On remarque que pour 10 lancers, il y a une grande variabilité : les différentes faces obtiennent des fréquences très différentes.

Plus on augmente le nombre de lancers, plus les fréquences se stabilisent proche de la probabilité (environ 16,7%).

Ceci reste vrai en appuyant sur F9 (ce qui permet de réeffectuer tous les lancers).

Théorème de stabilisation des fréquences

Lorsqu'on effectue une expérience aléatoire **un très grand nombre de fois**, la fréquence de chaque issue se rapproche de sa probabilité.

Exemple

Je lance un dé « normal » 1000 fois, et que je comptabilise le nombre de fois que j'ai fait 4.

Cette expérience aléatoire a été simulée sur la feuille de calcul partagée suivante :

https://docs.google.com/spreadsheets/d/1se9NSGbRJmGlelhFzq7ztX_F1ZdDMw6G-pyDolzb6w/

Je ne peux pas affirmer que j'ai fait 4 à exactement 1 lancer sur 6 (soit environ 167 fois) car il y a quand même une part d'aléatoire, mais je suis sûre que le nombre de fois que j'aurai fait 4 sera très proche de 167.

Vous pouvez vérifier cela en rechargeant la page : les 1000 lancers sont réinitialisés à chaque chargement.