Proportionnalité en géométrie

I - Rappels sur la proportionnalité

Définition

Deux grandeurs sont* ***proportionnelles*** *si on peut passer de l'une à l'autre en multipliant par un nombre (qui reste toujours le même).*
Ce nombre s'appelle le ***coefficient de proportionnalité****.*

* Voici quelques exemples de grandeurs avec des exemples d'unités correspondantes :

- La longueur (en mètres, cm, pieds, en miles...)
- La masse (en grammes, kg...)
- La vitesse (en km/h, m/s...)
- La quantité (5 pommes, 2 boîtes...)
- La mémoire informatique (en Gigaoctets (Go), Mo, To...)
- Le volume/la contenance (en m^3, litres(L),...)
- L'aire d'une surface (en m^2, hectares,...)
- ...

Exemple de situation de proportionnalité : le nombre d'œufs est proportionnel au prix.
10 œufs coûtent 1,5 €. Combien coûtent 6 œufs ?

1 œuf coûte 1,5 € ÷ 10 = 0,15 € donc 6 œufs coûtent 6 × 0,15 = 0,90€.

Pour savoir si on est dans une situation de proportionnalité, on peut calculer les produits en croix :

$1,8$	$7,2$
$84,5$	338

$1,8 \times 338 = 608,4$
$84,5 \times 7,2 = 608,4$
Les produits en croix sont égaux donc le tableau correspond à une situation de proportionnalité.

Pour calculer des valeurs dans une situation de proportionnalité, nous avons déjà vu des techniques :

- Calculer le coefficient de proportionnalité.

$\times ?$

8	10
6	$?$

On a : $8 \times ? = 6$.
Le coefficient de proportionnalité est donc : $? = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4} = 0,75$.
La valeur recherchée est donc $10 \times 0,75 = 7,5$

- Effectuer des opérations sur les colonnes d'un tableau de proportionnalité :

3	5	8
$1,2$	2	$?$

Ici on remarque que $3 + 5 = 8$ ($1^{\text{ère}}$colonne + $2^{\text{ème}}$colonne = $3^{\text{ème}}$colonne)
$? = 1,2 + 2$

- Utiliser la formule de la $4^{\text{ème}}$ proportionnelle :

3	5
7	$?$

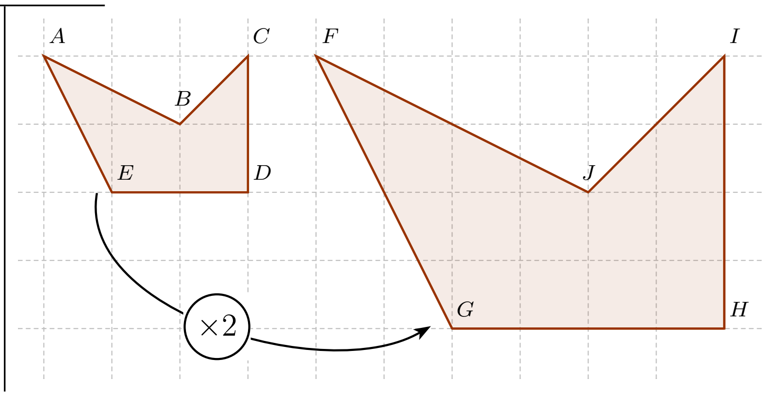
$? = \dfrac{7 \times 5}{3}$

Cette formule vient de l'égalité des produits en croix : $3 \times\ ? = 7 \times 5$ donc $? = \dfrac{7 \times 5}{3}$

II - Agrandissement et réduction

Agrandir ou réduire une figure correspond à une **situation de proportionnalité** entre les longueurs de la première figure et les **longueurs** de la figure agrandie (ou réduite).

Exemple



Ici par exemple, on a le tableau de proportionnalité :

AB	BC	CD	DE	EA	$\times 2$
FJ	JI	IH	HG	GF	

Donc $FJ = 2AB$, $JI = 2BC$, *etc.*

Pour calculer le coefficient :

- d'agrandissement on calcule $\dfrac{\text{grand côté}}{\text{petit côté}}$
- de réduction on calcule $\dfrac{\text{petit côté}}{\text{grand côté}}$

Remarques

Quand on multiplie par un nombre

- *plus grand que 1 : on agrandit*
- *entre 0 et 1 : on diminue*

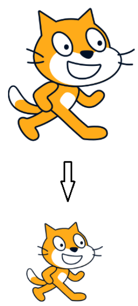
Exemple : $5 \times 0,5 = 2,5$ *;* $5 \times 1,5 = 7,5$

Lorsqu'on agrandit ou réduit une figure, les angles restent les mêmes.

III - Avec des pourcentages

Sur scratch on peut changer la taille d'un lutin avec la commande :

mettre la taille à ( ) % de la taille initiale



Imaginons que le chat a initialement une hauteur de 500 pixels. On utilise le bloc :

mettre la taille à (60) % de la taille initiale

Calculons la nouvelle taille du chat :

Taille réduite	60	?
Taille réelle	100	500

La taille initiale est 500 pixels, elle correspond à 100% (donc 500 et 100 sont sur la même ligne). Il n'y a plus qu'à trouver à quelle taille correspond 60 : $\frac{60 \times 500}{100} = 300$ pixels.

Remarques

- $60\% = \dfrac{60}{100} = 0,6$ *est le coefficient de réduction : appliquer le pourcentage revient à multiplier par ce coefficient.*
- *On peut aussi faire des agrandissement en appliquant un pourcentage : il suffit de prendre par exemple* 150% *de la taille initiale.*

Exercice 42 page 258 (pourcentage)

IV - Échelles

On utilise des échelles sur les cartes routières, mais aussi sur les schémas en biologie, ou encore sur les plans de maquettes, les notices de montage, etc.

Définition

*L'**échelle** est le coefficient de proportionnalité entre les dimensions réelles et les dimensions du dessin.*
Si l'échelle est supérieure à 1 la figure est un agrandissement ;
si l'échelle est inférieure à 1 c'est une réduction.

Remarque

Attention, toutes les valeurs d'une même ligne du tableau de proportionnalité doivent être dans la même unité.

Par exemple on peut voir sur une carte : $\boxed{\textbf{1 : 100 000}\ (1\,\text{cm} = 1\,\text{km})}$

Comme $1\,\text{km} = 1\,000\,\text{m} = 1\,000 \times 100\,\text{cm} = 100\,000\,\text{cm}$, cela correspond au tableau de proportionnalité suivant :

Dimensions sur la carte	1 cm	
Dimensions réelles	100 000 cm	

$\times \frac{1}{100\,000}$ $\qquad$ $\times 100\,000$

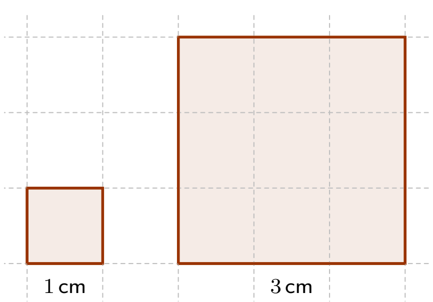
Remarque

*On a vu en 4ème que **diviser par un nombre revient à multiplier par l'inverse de ce nombre**.*
Diviser par $100\,000$ revient donc à multiplier par $\dfrac{1}{100\,000}$.

Exercices 33, 34 et 35 page 257

V - Effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur les aires et les volumes

a. Aires



Sur le dessin ci-contre, un carré de $1\,\text{cm}$ de côté a été agrandi en un carré de $3\,\text{cm}$ de côté. Le coefficient d'agrandissement est donc égal à 3.
Pourtant si on calcule les aires de ces deux carrés, on trouve :

Petit carré :
$1\,\text{cm} \times 1\,\text{cm} = 1\,\text{cm}^2$

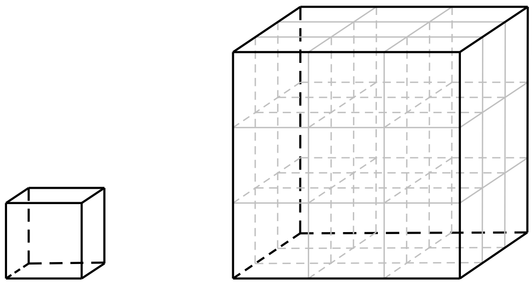
Grand carré :
$3\,\text{cm} \times 3\,\text{cm} = 9\,\text{cm}^2$

Le coeficient qui permet de passer de **l'aire** du petit carré à l'aire du grand carré est 3^2.

Plus généralement :

Quand les longueurs sont multipliées par un coefficient a, alors les aires sont multipliées par a^2.

b. Volumes



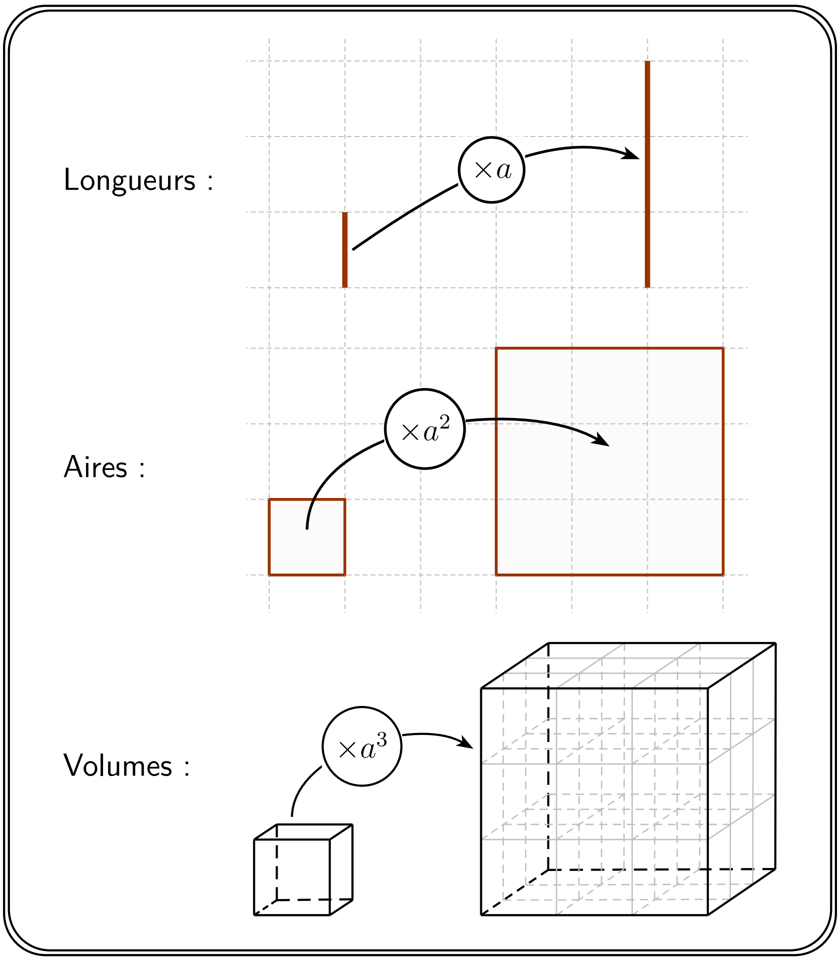
De même le petit cube ci-contre a été agrandi avec le coefficient 3.
Le volume du petit cube est égale à $1\,\text{cm}^3$ et le volume du grand cube est égale à $27\,\text{cm}^3$, c'est à dire :

$$3\,\text{cm} \times 3\,\text{cm} \times 3\,\text{cm} = 3^3\,\text{cm}^3$$

Plus généralement :

Quand les longueurs sont multipliées par un coefficient a, alors les volumes sont multipliés par a^3.

En résumé :



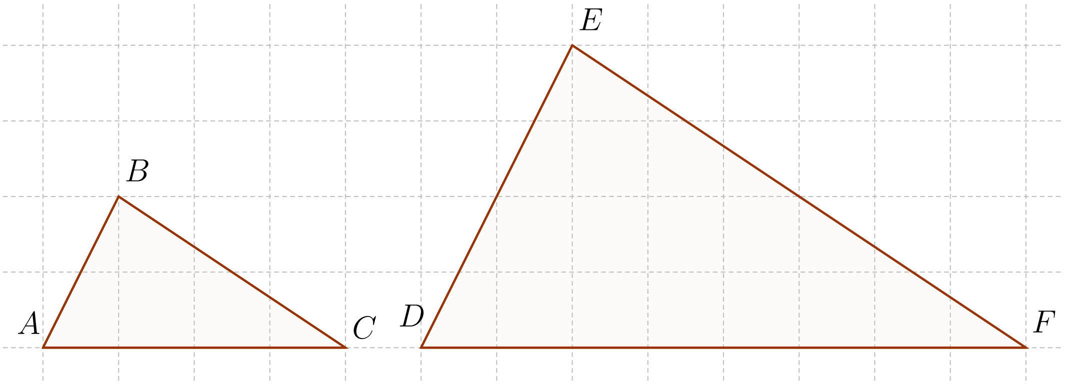
VI - Triangles semblables

a. « Proportionnels » pour des nombres, « semblables » pour des triangles

Définition

*Deux triangles sont **semblables** lorsque les longueurs de leurs côtés sont proportionnelles.*

Par exemple, ces deux triangles sont semblables. On peut trouver le coefficient d'agrandissement en comptant les carreaux.



	côté à gauche	côté en bas	côté à droite
Petit triangle	AB	BC	AC
Grand triangle	DE	EF	DF

$\times 2$

Le coefficient de proportionnalité est le coefficient de réduction (ou coefficient d'agrandissement suivant le sens). Ici par exemple, comme $AC = 4$ et $DF = 8$, le coefficient d'agrandissement pour passer de ABC à DEF est $\dfrac{DF}{AC} = \dfrac{8}{4} = 2$.

Dire que les triangles sont semblables revient donc à dire que les ***rapports**** de leurs côtés sont égaux, puisque dans les trois cas, on calcule le coefficient de réduction :

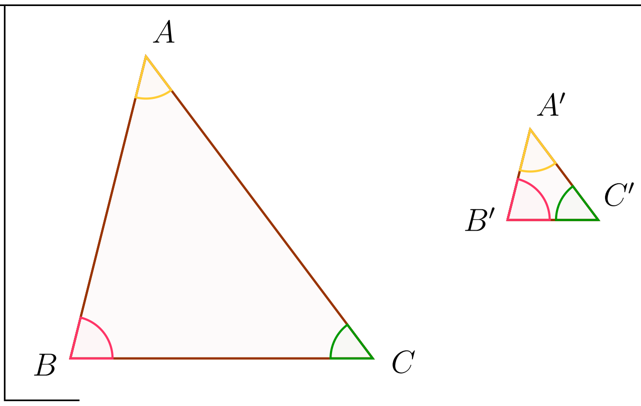
(* le rapport entre deux nombres est le quotient de ces nombres)

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

Exercices 40 et 43 page 366, et 11 page 359

b. Caractérisation angulaire des triangles semblables

Propriété (*Caractérisation angulaire des triangles semblables*)



- *Les triangles semblables ont leurs angles égaux deux à deux.*
- *Si deux triangles ont leurs angles égaux deux à deux, alors ils sont semblables.*

Triangle 1	$\widehat{BAC}$	$\widehat{ABC}$	$\widehat{ACB}$
Triangle 2	$\widehat{B'A'C'}$	$\widehat{A'B'C'}$	$\widehat{A'C'B'}$

Exercices 10 page 359, et 41, 42 et 45 page 366
Pour aller plus loin : 44 page 366 (penser à la somme des angles d'un triangle...)