

Puissances de 10

I - Rappels

a. Puissances de 10 positives

Définition

- $10^1 = 10$
- $10^2 = 10 \times 10 = 100$
- $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1\,000$
- $10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000$
- ...

10^1 se lit « 10 puissance 1 »

10^2 se lit « 10 au carré »

10^3 se lit « 10 au cube »

10^4 se lit « 10 puissance 4 »

...

$$10^n = \underbrace{10 \times 10 \times 10 \times \dots \times 10 \times 10}_{n \text{ fois}}$$

Remarques

- La puissance de 10 indique le nombre de 0 d'un nombre (et donc son **ordre de grandeur**).
Autrement dit, l'écriture décimale de 10^n est un 1 suivi de n zéros.
- $10^0 = 1$

b. Puissances de 10 négatives

Définition

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1$$

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0,01$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0,001$$

...

Remarque

$$10^{-5} = 0,00001 \text{ est un nombre } \mathbf{positif}.$$

Le signe – dans la puissance est juste là pour indiquer que cette puissance de 10 est au dénominateur d'une fraction (comme l'indique la définition ci-dessus).

Les puissances de 10 correspondent au tableau que vous avez déjà appris :

...	Milliard	Million	Millier	Centaine	Dizaine	Unité	Dixième	Centième	Millième	...
...	10^9	10^6	10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	...

c. Calculs

Méthode :

Pour faire des calculs avec des puissances de 10, on peut les transformer (soit au brouillon, soit dans sa tête) en produits (ou quotients) de 10.

Exemples

$$\begin{aligned} \star 10^5 \times 10^2 &= \underbrace{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}_{5 \text{ fois}} \times \underbrace{10 \times 10}_{2 \text{ fois}} = 10^7 \\ \star \frac{10^6}{10^4} &= \frac{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}{10 \times 10 \times 10 \times 10} = 10^2 \text{ (simplification de 10)} \\ \star 10^{-3} \times 10^4 &= \frac{10^4}{10^3} = \frac{10 \times 10 \times 10 \times 10}{10 \times 10 \times 10} = 10 \\ \star 10^2 \times 10^{-4} &= \frac{10^2}{10^4} = \frac{10 \times 10}{10 \times 10 \times 10 \times 10} = 10^{-2} \end{aligned}$$

II - Notation scientifique

Définition

L'écriture scientifique d'un nombre est de la forme :

$$a \times 10^n$$

$1 \leq a < 10$ n est un nombre entier relatif

Remarque

$1 \leq a < 10$ signifie que a a toujours un seul chiffre devant la virgule (qui n'est jamais un zéro) : il ne peut pas avoir de dizaine.

Exemples

- L'écriture scientifique de 156,32 est $1,5632 \times 10^2$
- L'écriture scientifique de 0,4321 est $4,321 \times 10^{-1}$
- Au lieu d'écrire que le soleil est à environ 150 000 000 km, on va écrire $1,5 \times 10^8$ km.
- Au lieu d'écrire que la taille du virus du sida est d'environ 0,000 145 mm, on écrira $1,45 \times 10^{-4}$ mm

Pourquoi avoir choisi une telle écriture ?

Prenons par exemple le nombre : $\underbrace{5}_{\text{milliards}} \underbrace{737}_{\text{millions}} \underbrace{109}_{\text{milliers}} \underbrace{248}_{\text{centaines}}$

Le chiffre 5 représente le nombre de milliards, mais pour s'en rendre compte, il faut compter le nombre de chiffres dans le nombre (ici c'est relativement facile car le nombre est bien écrit avec des espaces tous les 3 chiffres, mais imaginez s'il ne l'était pas !)

Alors qu'avec l'écriture $5,737\,109\,248 \times 10^9$, on sait tout de suite que 10^9 correspond à un milliard.

Autre avantage : il est plus court d'écrire $8,7 \times 10^{12}$ que 8 700 000 000 000 !

III - Préfixes de Nano à Giga

Pour adapter les unités aux ordres de grandeurs, on utilise des préfixes. Par exemple lorsqu'on veut donner les dimensions d'un pays, on ne va pas utiliser les mètres mais les **kilomètres**. Le préfixe kilo correspond à une multiplication par $1\ 000 = 10^3$, en effet $1\ km = 1\ 000\ m$. Il existe d'autres préfixes :

Nom du préfixe	notation	puissance de 10
giga	G	10^9
méga	M	10^6
kilo	k	10^3
hecto	h	10^2
deca	da	10^1
déci	d	10^{-1}
centi	c	10^{-2}
milli	m	10^{-3}
micro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}

Ces préfixes permettent de faire des conversions sans avoir à passer par un tableau long à tracer.

Exemple

Quelle longueur est la plus grande : $5,4 \times 10^5\ cm$ ou $5,4 \times 10^{-4}\ km$?

- $5,4 \times 10^5\ cm = 5,4 \times 10^5 \times 10^{-2}\ m = 5,4 \times 10^3\ m$
- $5,4 \times 10^{-4}\ km = 5,4 \times 10^{-4} \times 10^3\ m = 5,4 \times 10^{-1}\ m$

Pour utiliser cette technique, il faut connaître **par coeur** les correspondances entre préfixes et puissances de 10 (données dans le tableau précédent).

IV - Données informatiques, unité de mémoire : l'octet

Dans un ordinateur, toutes les informations sont codées sous forme de 0 et de 1 : c'est ce qu'on appelle du **binaire** (pour en savoir plus, clique ici).

L'emplacement de mémoire qui contient soit un 0 soit un 1 s'appelle un **bit** (contraction de « binary digit », digit en anglais signifie chiffre).

Pour coder un caractère (lettre, chiffre, symbole...) on utilise **8 bits**, c'est un **octet**. Par exemple la table suivante est une façon de coder les caractères créée en 1960.

ASCII Code: Character to Binary

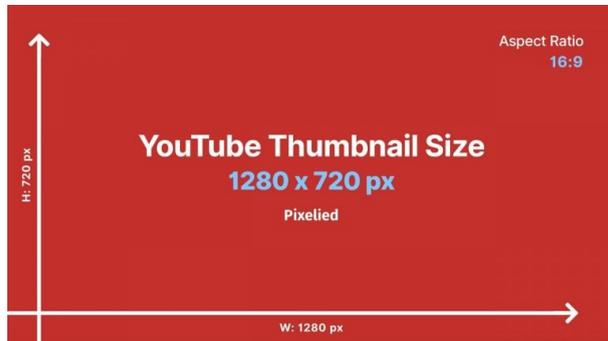
0	0011 0000	C	0100 0011	O	0100 1111	a	0110 0001	m	0110 1101	Y	0111 1001
1	0011 0001	D	0100 0100	P	0101 0000	b	0110 0010	n	0110 1110	z	0111 1010
2	0011 0010	E	0100 0101	Q	0101 0001	c	0110 0011	o	0110 1111	.	0010 1110
3	0011 0011	F	0100 0110	R	0101 0010	d	0110 0100	p	0111 0000	,	0010 0111
4	0011 0100	G	0100 0111	S	0101 0011	e	0110 0101	q	0111 0001	:	0011 1010
5	0011 0101	H	0100 1000	T	0101 0100	f	0110 0110	r	0111 0010	;	0011 1011
6	0011 0110	I	0100 1001	U	0101 0101	g	0110 0111	s	0111 0011	?	0011 1111
7	0011 0111	J	0100 1010	V	0101 0110	h	0110 1000	t	0111 0100	!	0010 0001
8	0011 1000	K	0100 1011	W	0101 0111	i	0110 1001	u	0111 0101	'	0010 1100
9	0011 1001	L	0100 1100	X	0101 1000	j	0110 1010	v	0111 0110	"	0010 0010
A	0100 0001	M	0100 1101	Y	0101 1001	k	0110 1011	w	0111 0111	{	0010 1000
B	0100 0010	N	0100 1110	Z	0101 1010	l	0110 1100	x	0111 1000	}	0010 1001
										space	0010 0000

Une phrase de 64 caractères (en comptant les espaces) a donc besoin d'un espace de 64 octets. Dans un livre de 1 000 pages, si on considère qu'il y a en moyenne 1 500 caractères par page, on a :
 $1\,000 \times 1\,500 = 1\,500\,000$ octets.

Octet est simplement noté « o », au même titre que mètre est noté « m » ou gramme « g », et comme pour les autres unités, on peut utiliser des préfixes :

$$1\,500\,000\text{ o} = 1,5 \times 10^6\text{ o} = 1,5\text{ Mo}$$

Postée sur Youtube le 18 juin 2016, la vidéo « baby shark » a dépassé les 14 milliards de vues en janvier 2024. Cette vidéo de 2 min16 est proposée automatiquement en 720p (HD) (1280 pixels sur 720 pixels, 30 images par seconde). Sachant qu'un pixel est codé par 3 octets (chaque octet donne la quantité de chaque couleur primaire contenu dans le pixel), calculons la taille de cette vidéo (sans le son).



Calculons le nombre de pixels pour **une** image :

$$1\,280 \times 720 = 921\,600\text{ pixels}$$

Avec 3 octets par pixel, cela représente

$$921\,600 \times 3 = 2\,764\,800\text{ o} \approx 2,7\text{ Mo.}$$

Avec 30 images par seconde, dans les 2 min 16 = 136 s de vidéo, on a donc $30 \times 136 = 4\,080$ images.

$$\text{On a donc } 4\,080 \times 2,7\text{ Mo} = 11\,016\text{ Mo} \approx \boxed{11\text{ Go}}$$

En réalité, des techniques de compression permettent de réduire la mémoire nécessaire pour enregistrer des vidéos (tous les pixels ne sont pas recalculés à chaque image). Cela représente plutôt 70 Mo par minute pour une vidéo en HD (ce qui ferait environ 1,9 Go pour la vidéo « baby shark »).

Remarques

- Vous avez peut-être déjà vu « GB » à la place de « Go », cela signifie « Giga Bytes », c'est l'unité utilisée par les américains... attention à ne pas confondre un « bit » et un « Byte » (prononcer « baït »)!
 $1\text{ Byte} = 8\text{ bits}$.
- Un livre de 1 000 pages tapé à l'ordinateur prend moins de place qu'une seule photo en haute définition.
- La génération, le stockage et le transport de données informatiques utilise beaucoup d'énergie... et donc est source de pollution.



L'impact carbone du transport et du stockage de données sur un serveur en France est de 0,176 g CO₂e/Mo/an. Ainsi, si on garde une donnée de 1 Mo en France pendant 10 ans, on est responsable de l'émission de 1,413 g CO₂e, soit 7,2 kg CO₂e pour 5 Go de stockage, contre 0,015 g CO₂e pour le stockage sur disque dur personnel.



Alexandre Couvez, 2022