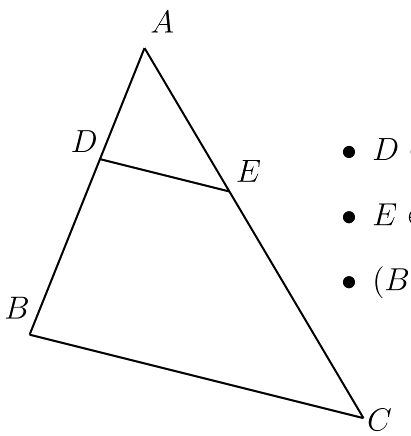
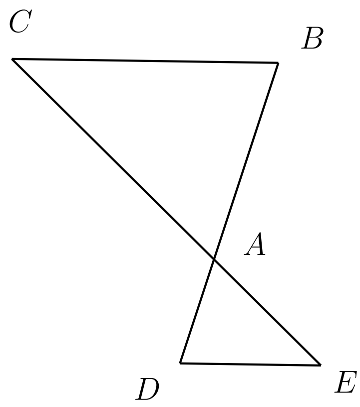
La réciproque de Thalès

Rappels

Le théorème de Thalès s'applique dans deux situations :



- $D \in [AB]$
- $E \in [AC]$
- $(BC) \,//\, (DE)$



- $A \in [BD]$
- $A \in [CE]$
- $(BC) \,//\, (DE)$

Dans ces deux situations, on a un grand triangle ABC et un petit triangle ADE qui sont image l'un de l'autre par une **homothétie de centre A** (de **rapport positif** dans la situation de **gauche** et de **rapport négatif** dans la situation de **droite**). Donc dans les deux cas on a un coefficient d'agrandissement (ou de réduction) qu'on peut calculer de trois manières différentes (car il y a 3 côtés), mais qui aura la même valeur, quelque soit les longueurs homologues qu'on choisit pour le calculer :

Coefficient de réduction : $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC}$ Coefficient d'agrandissement : $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE} = \dfrac{BC}{DE}$

On doit penser au théorème de Thalès lorsque :

- on veut calculer une ou des longueurs,
- l'énoncé parle de droites parallèles dans des triangles.

Exercice n°11 page 422

I - Que signifie le mot « réciproque » ?

Nous avons déjà vu le mot « réciproque » pour le théorème de Pythagore. Pour prendre un exemple plus simple, regardons le théorème :

S'il pleut, alors ce qui n'est pas à l'abri est mouillé.

Les mathématiciens (ceux qui font de la logique) utilisent la flèche $\Rightarrow$ pour représenter ce lien de cause à effet, cette flèche se lit « implique ». La proposition qui est avant la flèche s'appelle **l'hypothèse**, et celle après la flèche s'appelle **la conclusion**.

Il pleut $\Rightarrow$ ce qui n'est pas à l'abri est mouillé.

Ce théorème semble vrai : le bon sens nous dit que s'il pleut, effectivement tout ce qui va être touché par la pluie sera mouillé.

Ce qu'on appelle la **réciproque**, c'est un nouveau théorème dont la flèche est dans l'autre sens :

Il pleut $\Leftarrow$ ce qui n'est pas à l'abri est mouillé.

Cela revient à échanger l'hypothèse et la conclusion :

Ce qui n'est pas à l'abri est mouillé $\Rightarrow$ il pleut.

Ce nouveau théorème est-il vrai ?

Imaginons que Mme Toromanoff fasse une bataille d'eau géante dans la cour avec tous ses élèves (oui, il faut beaucoup d'imagination). Alors beaucoup de choses (ou d'élèves, ou Mme Toromanoff elle-même) qui ne sont pas à l'abri seront mouillés, mais il y a peu de chances qu'il pleuve (on ne fait pas de bataille d'eau quand il pleut voyons !).

Cette réciproque est fausse. Ce n'est pas toujours le cas : pour le théorème de Pythagore par exemple, la réciproque est vraie ! C'est ce qui permet de démontrer qu'un triangle est rectangle.

Exercice

Voici un théorème : « Les diagonales du losange se coupent perpendiculairement en leur milieu. »

1. *Énoncer la réciproque de ce théorème.*
2. *Cette réciproque est-elle vraie ? (Justifier)*

Correction :

1. Ce théorème peut se reformuler de cette manière : « Si un quadrilatère est un losange alors ses diagonales se coupent perpendiculairement en leur milieu.

   La réciproque serait donc : « Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent perpendiculairement en leur milieu, alors c'est un losange. »

2. Pour savoir si cette réciproque est vraie, on peut commencer par tracer deux segments perpendiculaires, qui se coupent en leur milieu. On observe alors qu'effectivement, le quadrilatère obtenu est toujours un losange (Par définition, un losange est un quadrilatère dont tous les côtés sont de même longueur).

   On peut démontrer ce théorème en remarquant que les diagonales coupent le quadrilatère en 4 triangles rectangles identiques, donc leurs hypoténuses (qui sont les côtés du losange) sont bien de même longueur.

Remarque (Hors programme)

La réciproque est parfois confondue avec la **contraposée**.

La contraposée est aussi un nouveau théorème fait à partir d'un théorème de base, mais en utilisant la négation.

Pour notre exemple, la contraposée serait :

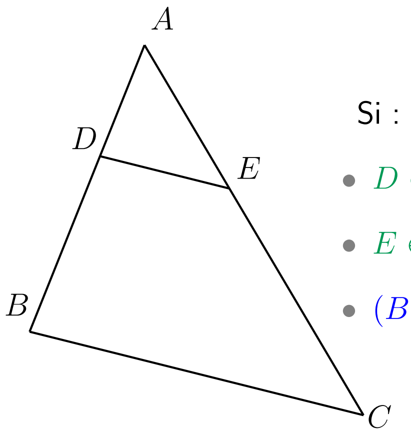
Ce qui n'est pas à l'abri **n'** *est* **pas** *mouillé* $\Rightarrow$ *il* **ne** *pleut* **pas**.

Si un théorème est vrai sa contraposée est forcément vraie aussi !

Dans le cas du théorème de Pythagore, c'est ce qui sert à démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle.

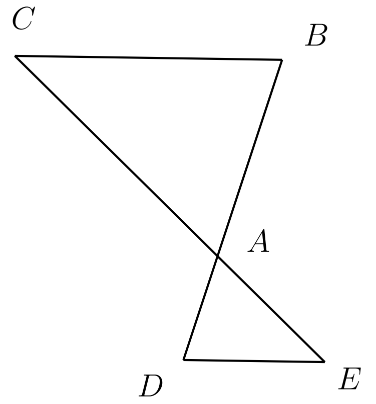
II - Comment formuler la réciproque du théorème de Thalès ?

L'énoncé du théorème de Thalès est plus complexe car en plus du lien de déduction entre une hypothèse et une conclusion, il y a tout un contexte. Je vais donc repérer en vert ce qui est du contexte, en bleu ce qui correspond à l'hypothèse du théorème de Thalès et en rouge sa conclusion.



Si :

- $D \in [AB]$
- $E \in [AC]$
- $(BC) // (DE)$,



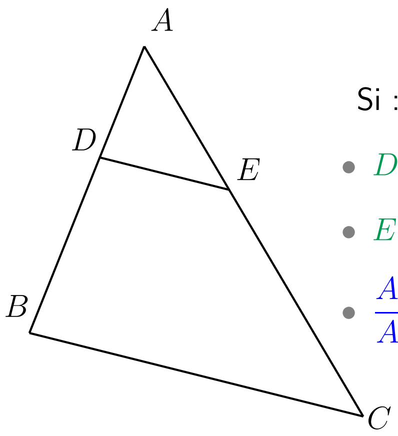
Si :

- $A \in [BD]$
- $A \in [CE]$
- $(BC) // (DE)$,

alors d'après le théorème de Thalès :

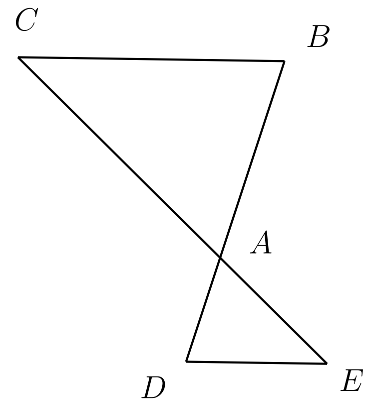
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

Pour énoncer la réciproque de Thalès, il va donc faloir laisser à leur place les éléments de contexte, et simplement échanger les hypothèses et les conclusions :



Si :

- $D \in [AB]$
- $E \in [AC]$
- $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC}$,



Si :

- $A \in [BD]$
- $A \in [CE]$
- $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC}$,

alors d'après la **réciproque** du théorème de Thalès :

$$(BC)\,//\,(DE)$$

Mais en réalité, nous n'aurons pas besoin de démontrer toutes les égalités $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC}$, car dans le contexte du théorème de Thalès, quand $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$, toutes les autres égalités sont vraies aussi.

Pourquoi ces rapports là et pas $\dfrac{DE}{BC}$?

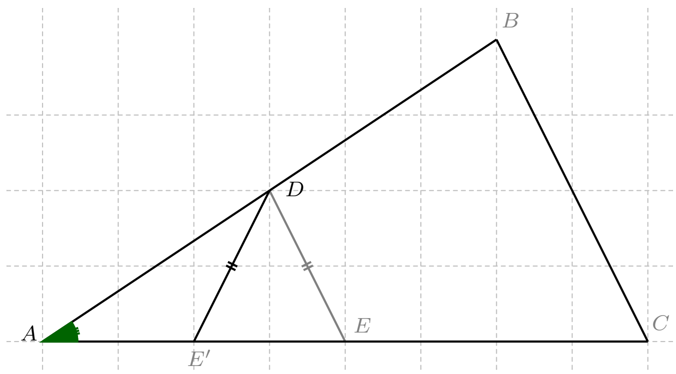
Parce-qu'il a des configurations dans lesquelles ça ne fonctionne pas :

Ici par exemple, $(DE)\,//\,(BC)$ donc d'après le théorème de Thalès,

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

$DE = DE'$ donc $\dfrac{DE'}{BC} = \dfrac{AD}{AB}$,

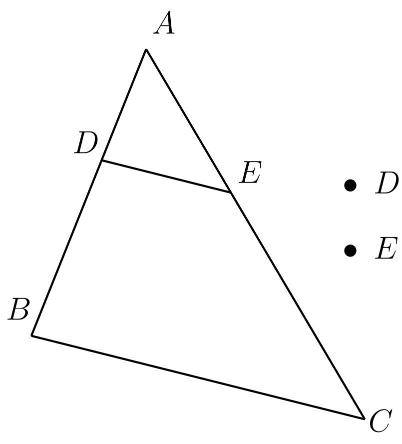
mais (DE') n'est pas parallèle à (BC).



En conclusion, l'énoncé de la réciproque du Théorème de Thalès est :

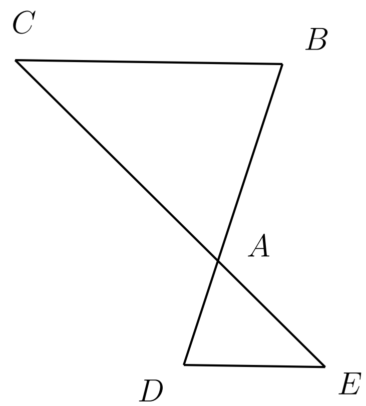
Théorème (Réciproque de Thalès)

Dans une situation de Thalès, c'est à dire :



- $D \in [AB]$
- $E \in [AC]$

ou



- $A \in [BD]$
- $A \in [CE]$

Si $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$ *alors* $(DE)\,//\,(BC)$.

On doit penser à la **réciproque** du théorème de Thalès lorsque :

- on veut démontrer que des droites sont parallèles,
- l'énoncé donne des longueurs.

Remarques

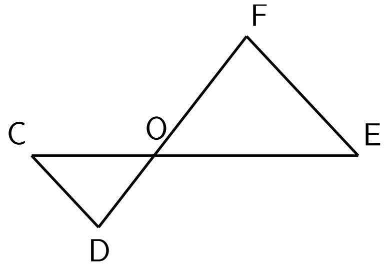
- *Comme pour la réciproque du théorème de Pythagore, on ne peut pas affirmer que* $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ *si* $\frac{AD}{AB} = 0,123456789$ *et* $\frac{AE}{AC} = 0,123456798$ *il faut des* **valeurs exactes** *!*
- *Pas besoin de calculer le quotient pour savoir si* $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ *: il suffit de vérifier si les* **produits en croix** *sont égaux !*

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \quad \Leftrightarrow \quad AD \times AC = AE \times AB$$

Exercice (sans calculatrice) : Les quotients $\frac{5}{3}$ et $\frac{8}{5}$ sont-il égaux ?
Correction : Non car $5 \times 5 = 25 \neq 8 \times 3 = 24$.

III - Exemples types

Exercice 1
Sur la figure ci-dessous, on a $OD = 1,2$; $OF = 2$; $OE = 2,7$ et $OC = 1,62$.



Démontrer que les droites (CD) et (EF) sont parallèles.

Correction :

Calculons les rapports :

- $\frac{OD}{OF} = \frac{1,2}{2} = 0,6$
- $\frac{OC}{OE} = \frac{1,62}{2,7} = 0,6$

Ces rapports sont donc égaux.

Ainsi, sur la figure ci-dessus, on a :

- O $\in$ [CE]
- O $\in$ [DF]
- $\frac{OD}{OF} = \frac{OC}{OE}$

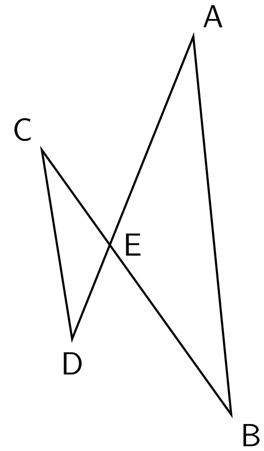
donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (CD) et (EF) sont parallèles.

Exercices n°18 et 22 page 463

Exercice 2 (Brevet Nouvelle-Calédonie février 2020)

Indiquer si l'affirmation suivante est VRAIE ou FAUSSE et justifier la réponse.
Données : Sur la figure ci-dessous, les droites (AD) et (CB) sont sécantes en E.
Affirmation : Les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

On a :
CE = 1,6 cm
DE = 1,2 cm
EA = 2,8 cm
EB = 3,4 cm



Correction :
Nous sommes dans une situations de Thalès car E est le point d'intersection des segments $[BC]$ et $[AD]$.
Calculons les rapports :

- $\dfrac{EC}{EB} = \dfrac{1,6}{3,4} = \dfrac{8}{17} \approx 0,4705882353$
- $\dfrac{ED}{EA} = \dfrac{1,2}{2,8} = \dfrac{3}{7} \approx 0,4285714286$

Si les droites (AB) et (CD) étaient parallèles, alors les rapports auraient été égaux, mais ce n'est pas le cas, donc les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.
En conclusion l'affirmation est fausse.
Remarque : nous n'avons pas utilisé la réciproque du théorème de Thalès mais le théorème direct.