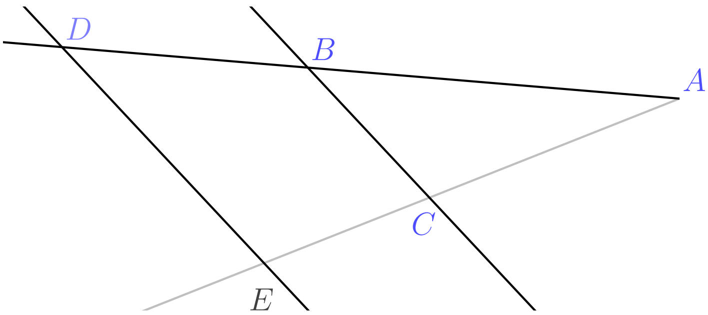
Mme Toromanoff

Collège Jean Mermoz
3ème

Théorème de Thalès

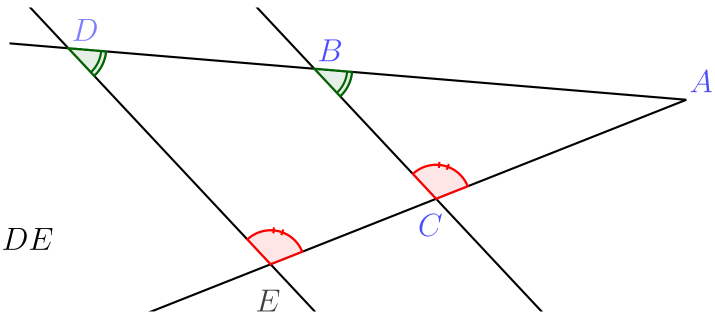
I - Introduction : démonstration du théorème



Dans la configuration ci-contre, on a les données suivantes :

- $(DE)//(BC)$
- $B \in [AD]$
- $C \in [AE]$

Si on ne regarde que les droites parallèles (DE) et (BC) et la droite (AD) comme sécante, il apparait des angles alternes-internes et correspondants égaux.

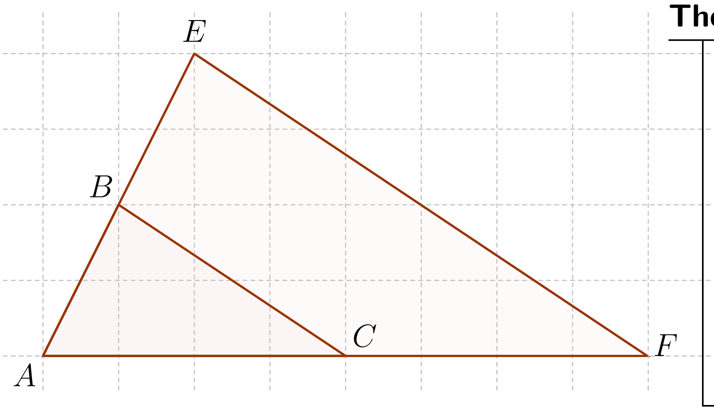


Ainsi, les triangles ABC et ADE ont leurs angles égaux deux à deux : ils sont **semblables**.
Par la définition des triangles semblables, les longueurs de leurs côtés sont proportionnelles. Le nombre recherché dans les opérations à trou suivantes :
$AB \times \ldots = AD \qquad AC \times \ldots = AE \qquad BC \times \ldots = DE$
est le coefficient de proportionnalité. Il peut donc se calculer de 3 manières différentes :

$$\text{coefficient de proportionnalité} = \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

Ce raisonnement permet d'énoncer un théorème : c'est le théorème de Thalès

II - Énoncé du théorème de Thalès



Théorème

Dans un triangle AEF, si un point B est sur le segment $[AE]$ et un point C sur le segment $[AF]$ de manière à ce que (BC) et (EF) soient parallèles, alors les rapports des côtés homologues sont égaux :

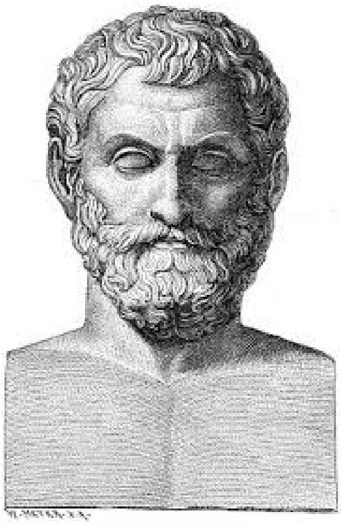
$$\boxed{\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF} = \frac{BC}{EF}}$$

Remarque

Le triangle ne s'appelle pas forcément AEF. De plus, on peut écrire la même chose plus rapidement grâce aux symboles mathématiques ($\in$ = appartient à ; $//$ = est parallèle à) :

Dans un triangle ABC, si $A' \in [AB]$, $B' \in [AC]$ et $(B'C')//(BC)$, alors $\dfrac{AB'}{AB} = \dfrac{AC'}{AC} = \dfrac{B'C'}{BC}$

III - Qui était Thalès, et pourquoi ce théorème porte-t-il son nom ?



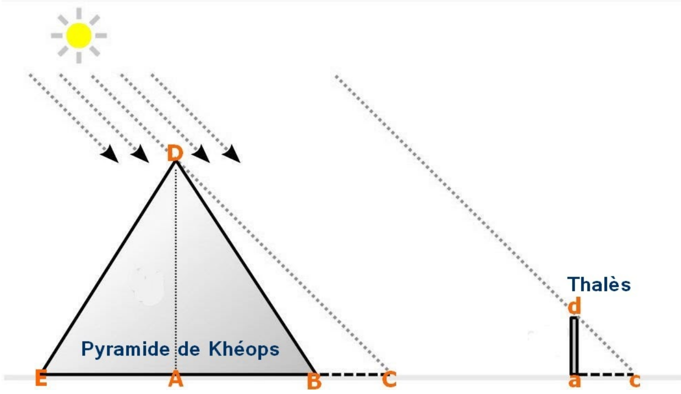
Thalès de Milet est un philosophe et savant grec, né à Milet vers 625-620 av. J.-C. et mort vers 548-545 av. J.-C.

C'est l'un des Sept sages de la Grèce antique et le fondateur présumé de l'école milésienne. Philosophe de la nature, il passe pour avoir effectué un séjour en Égypte, où il aurait été initié aux sciences égyptienne et babylonienne. On lui attribue de nombreux exploits, comme **le calcul de la hauteur de la grande pyramide** ou la prédiction d'une éclipse, ainsi que le théorème de Thalès. Il fut l'auteur de nombreuses recherches mathématiques, notamment en géométrie.

Personnage légendaire, qui semble n'avoir rien écrit, sa méthode d'analyse du réel en fait l'une des figures majeures du raisonnement scientifique.

D'après la légende, Thalès aurait dit :

> ***Le rapport que j'entretiens avec mon ombre est le même que celui que la pyramide entretient avec la sienne.***

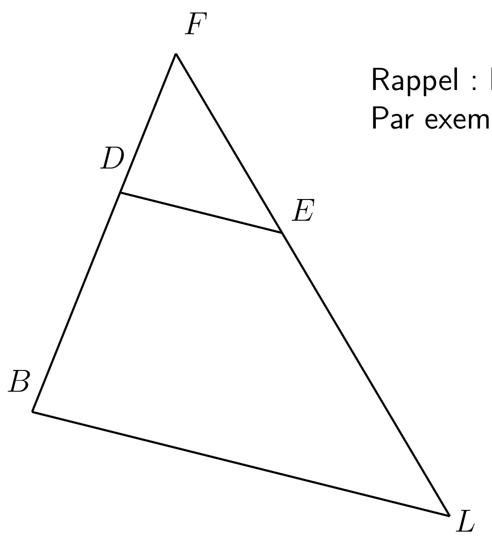


Thalès avait tout simplement compris que le triangle rectangle formé par sa hauteur et son ombre était semblable avec le triangle rectangle formé par la hauteur de la pyramide et son ombre (triangle DAC sur le schéma ci-dessus). Ce qu'il appelle le **rapport** est un **coefficient de proportionnalité**.

Remarque

En France, nous avons décidé d'appeler ce théorème ainsi, alors qu'on ne sait pas vraiment qui l'a démontré en premier, on le trouve dans « Les éléments » d'Euclide (-300). Dans d'autres pays, on l'appelle « Intercept theorem » ou encore « Vierstreckensatz » (théorème des quatre segments).

IV - Exemple type d'utilisation du théorème de Thalès



Rappel : le symbole $\in$ signifie « appartient à ».
Par exemple « $A \in (BC)$ » signifie que le point A est sur la droite (BC).

> Sur la figure ci-contre, on sait que $D \in [BF]$, $E \in [FL]$ et que (DE) est parallèle à (BL).
>
> De plus $FB = 5\,\text{cm}$; $FL = 7\,\text{cm}$; $BL = 5,7\,\text{cm}$ et $DE = 2,2\,\text{cm}$.
>
> Calculer la longueur FE.

Solution :

Comme $D \in [BF]$, $E \in [FL]$ et que (DE) est parallèle à (BL), on peut appliquer le théorème de Thalès ; Il nous permet d'affirmer que :

$$\frac{FD}{FB} = \frac{FE}{FL} = \frac{DE}{BL}$$

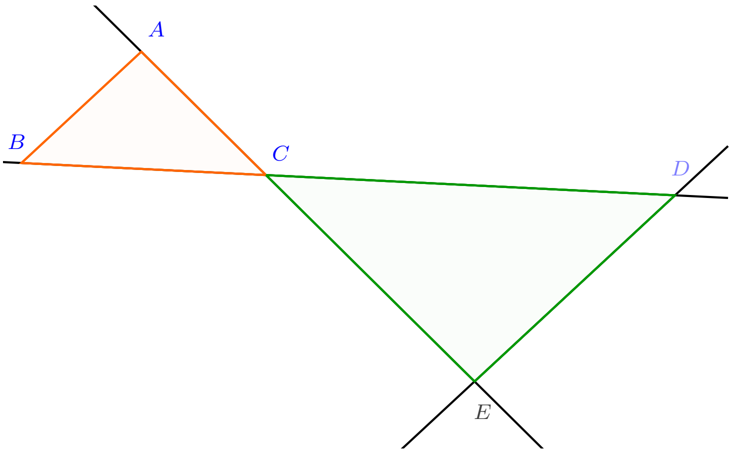
Remplaçons les valeurs données par l'énoncé afin de calculer la longueur FE (la fraction $\frac{FD}{FB}$ est inutile ici donc je ne la recopie pas) :

$$\frac{FE}{7} = \frac{2,2}{5,7}$$

$$FE = \frac{2,2 \times 7}{5,7} \approx 2,701754386\,\text{cm}.$$

V - Configuration papillon

Le théorème de Thalès s'utilise dans une autre situation :

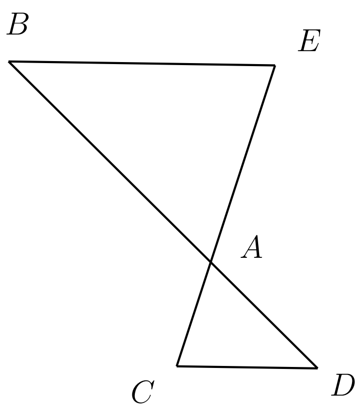


On a bien sûr toujours deux triangles semblables, mais au lieu d'être imbriqués l'un dans l'autre, ils sont opposés par le sommet qu'ils ont en commun.

Pour que les triangles soient semblables, il faut que (AB) soit parallèle à (DE).

Les côtés $[AB]$ et $[DE]$ sont homologues.
Les côtés $[AC]$ et $[CE]$ sont homologues.
Les côtés $[BC]$ et $[CD]$ sont homologues.

Exemple type



Sur la figure ci-contre, on sait que E, A et C sont alignés dans cet ordre, que B, A et D sont alignés dans cet ordre, et que (BE) est parallèle à (CD). De plus $EA = 2,1$; $BA = 2,9$; $BE = 2,72$ et $AC = 1,11$.
Calculer la longueur AD.

Solution :

Comme E, A et C sont alignés dans cet ordre, que B, A et D sont alignés dans cet ordre, et que (BE) est parallèle à (CD), on peut appliquer le théorème de Thalès ; Il nous permet d'affirmer que :

$$\frac{EA}{AC} = \frac{BA}{AD} = \frac{EB}{CD}$$

Remplaçons les valeurs données par l'énoncé afin de calculer la longueur AD (la fraction $\frac{EB}{CD}$ est inutile ici donc je ne la recopie pas) :

$$\frac{2,1}{1,11} = \frac{2,9}{AD}$$

$$AD = \frac{1,11 \times 2,9}{2,1} \approx 1,532857143$$

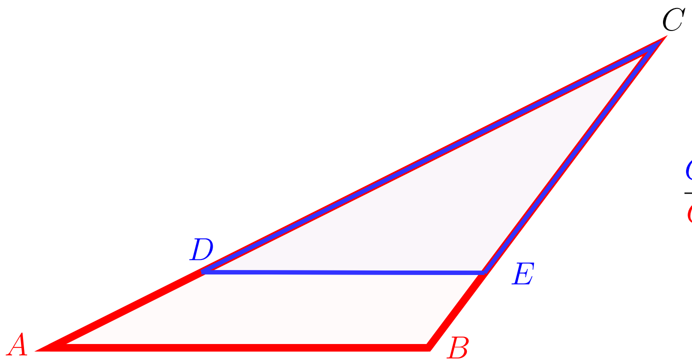
VI - Astuces

Comment savoir s'il faut utiliser le théorème de Thalès ?

- L'exercice demande de calculer une longueur
- il y a des triangles semblables
  - soit imbriqués
  - soit « en papillon »

Comment ne pas se tromper pour écrire les rapports ?

Il faut commencer par bien repérer le "petit" et le "grand" triangle.



$$\frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB} = \frac{DE}{AB}$$

- on n'utilise que des côtés de ces triangles (si c'est juste un morceau d'un côté (par exemple DA) ce n'est pas bon)
- deux côtés homologues sont dans la même fraction
- tous les numérateurs correspondent à des côtés du même triangle
- tous les dénominateurs correspondent à des côtés du même triangle