

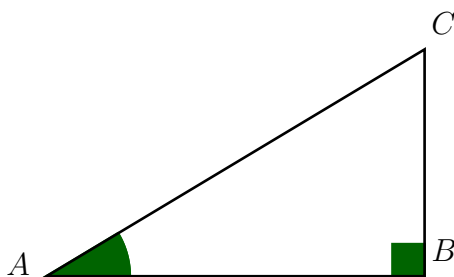
Trigonométrie

I - Découverte

En cliquant sur le lien <https://www.geogebra.org/m/aarz3kuc>, vous allez pouvoir observer l'effet du changement des longueurs et des angles sur les rapports des côtés du triangle.

On remarque que dès qu'on modifie le triangle, les valeurs de certains côtés changent. Les rapports calculés par géogébra :

- changent également quand on change l'angle vert du triangle,
- ne changent pas quand les angles restent les mêmes et que seuls les longueurs des côtés changent.



Autrement dit, dans le triangle ABC rectangle en B , il y a un lien entre l'angle $\widehat{CAB}$ et les rapports $\frac{AB}{AC}$, $\frac{BC}{AC}$, et $\frac{BC}{AB}$.

S'ils ne changent qu'ensemble, on doit pouvoir calculer l'un grâce à l'autre (et vice versa).

Les mathématiciens ont commencé à faire des tables qui donnaient les longueurs en fonction des angles, vous trouverez ci-dessous un exemple de celles du mathématicien grec Ptolémée Claude (90 - 168).

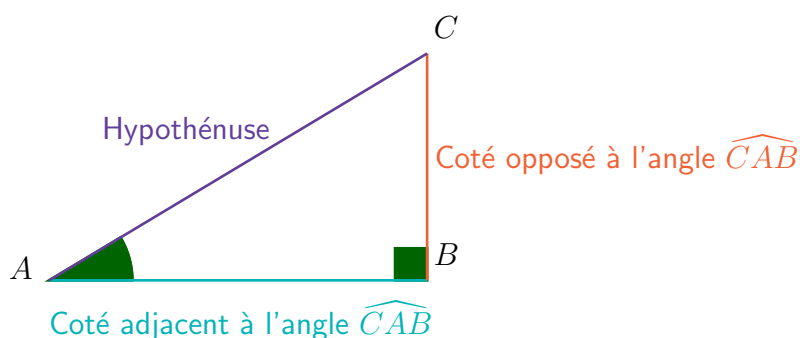
Durant le 15^{ème} siècle, l'Allemand REGIOMONTANUS invente le mot **sinus** dans ses travaux sur la trigonométrie (De Triangulis omnimodus en 1464, publié en 1533) pour désigner le rapport $\frac{BC}{AC}$.

Puis d'autres mathématiciens après lui désignent $\frac{AB}{AC}$ comme le **cosinus** de l'angle $\widehat{CAB}$, et $\frac{BC}{AB}$ comme la **tangente**.

TABLE DES DROITES INSCRITES DANS LE CERCLE.								
ARCS.		CORDES.		TRENTIÈMES DES DIFFÉRENCES.				
Degrés.	Min.	Part. du Diam.	Prim.	Secund.	Part.	Prim.	Secund.	Terc.
0	30	0	31	25	0	1	2	50
1	0	1	2	50	0	1	2	50
1	30	1	34	15	0	1	2	50
2	0	2	5	40	0	1	2	50
2	30	2	37	4	0	1	2	48
3	0	3	8	26	0	1	2	48
3	30	3	39	52	0	1	2	48
4	0	4	11	16	0	1	2	47
4	30	4	42	40	0	1	2	47
5	0	5	14	4	0	1	2	46
5	30	5	45	27	0	1	2	45
6	0	6	16	49	0	1	2	44
6	30	6	48	11	0	1	2	43
7	0	7	19	33	0	1	2	42
7	30	7	50	54	0	1	2	41
8	0	8	22	15	0	1	2	40
8	30	8	53	35	0	1	2	39
9	0	9	24	54	0	1	2	38
9	30	9	56	13	0	1	2	37
10	0	10	27	32	0	1	2	35
10	30	10	58	49	0	1	2	33
11	0	11	30	5	0	1	2	32
11	30	12	1	21	0	1	2	30
12	0	12	32	36	0	1	2	28
12	30	13	3	50	0	1	2	27
13	0	13	35	4	0	1	2	25
13	30	14	6	16	0	1	2	23
14	0	14	37	27	0	1	2	21
14	30	15	8	38	0	1	2	19
15	0	15	39	47	0	1	2	17
15	30	16	10	56	0	1	2	15
16	0	16	42	5	0	1	2	13
16	30	17	13	9	0	1	2	10
17	0	17	44	14	0	1	2	7
17	30	18	15	17	0	1	2	5
18	0	18	46	19	0	1	2	3
18	30	19	17	21	0	1	2	0
19	0	19	48	21	0	1	1	57
19	30	20	19	19	0	1	1	54
20	0	20	50	16	0	1	1	51
20	30	21	21	12	0	1	1	48
21	0	21	52	6	0	1	1	45
21	30	22	22	58	0	1	1	42
22	0	22	53	49	0	1	1	39
22	30	23	24	39	0	1	1	36

ΚΑΝΟΝΙΟΝ ΤΩΝ ΕΝ ΚΥΚΛΩ ΣΥΘΕΙΩΝ.							
ΗΕΡΙΟΦΕΙΩΝ.	ΣΥΘΕΙΩΝ.			ΕΞΗΚΩΤΩΝ.			
Μορφαί.	Η.	Π.	Δ.	Η.	Π.	Δ.	Τ.
α	α	β	γ	δ	ε	ζ	η
α	α	β	γ	δ	ε	ζ	η
α	α	β	γ	δ	ε	ζ	η
β	β	γ	δ	ε	ζ	η	θ
β	β	γ	δ	ε	ζ	η	θ
γ	γ	δ	ε	ζ	η	θ	ι
γ	γ	δ	ε	ζ	η	θ	ι
δ	δ	ε	ζ	η	θ	ι	κ
δ	δ	ε	ζ	η	θ	ι	κ
ε	ε	ζ	η	θ	ι	κ	λ
ε	ε	ζ	η	θ	ι	κ	λ
ε	ε	ζ	η	θ	ι	κ	λ
ζ	ζ	η	θ	ι	κ	λ	μ
ζ	ζ	η	θ	ι	κ	λ	μ
η	η	θ	ι	κ	λ	μ	ν
η	η	θ	ι	κ	λ	μ	ν
θ	θ	ι	κ	λ	μ	ν	ξ
θ	θ	ι	κ	λ	μ	ν	ξ
ι	ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο
ι	ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο
κ	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π
κ	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π
λ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ρ
λ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ρ
μ	μ	ν	ξ	ο	π	ρ	σ
μ	μ	ν	ξ	ο	π	ρ	σ
ν	ν	ξ	ο	π	ρ	σ	τ
ν	ν	ξ	ο	π	ρ	σ	τ
ξ	ξ	ο	π	ρ	σ	τ	υ
ξ	ξ	ο	π	ρ	σ	τ	υ
ο	ο	π	ρ	σ	τ	υ	φ
ο	ο	π	ρ	σ	τ	υ	φ
π	π	ρ	σ	τ	υ	φ	χ
π	π	ρ	σ	τ	υ	φ	χ
ρ	ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ
ρ	ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ
σ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω
σ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω
τ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	
τ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	
υ	υ	φ	χ	ψ	ω		
υ	υ	φ	χ	ψ	ω		
φ	φ	χ	ψ	ω			
φ	φ	χ	ψ	ω			
χ	χ	ψ	ω				
χ	χ	ψ	ω				
ψ	ψ	ω					
ψ	ψ	ω					
ω	ω						
ω	ω						

II - Pour pouvoir désigner les rapports : un peu de vocabulaire



III - Définition et utilisation du cosinus d'un angle

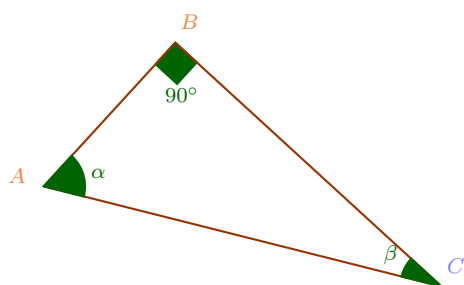
Définition

Dans un triangle ABC rectangle en B, le cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$ est défini par le quotient :

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{AB}{AC}$$

Remarques

- Dans un triangle rectangle, les deux angles qui ne sont pas l'angle droit sont complémentaires (leur somme vaut 90°). Ils sont donc toujours aigus (plus petits que 90°)
- On peut résumer la formule du cosinus par : $\cos(\alpha) = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$
Le côté adjacent à l'angle est celui qui forme l'angle avec l'hypoténuse.



Par exemple sur ce triangle, l'hypoténuse est

Le côté adjacent à l'angle α est

Le côté adjacent à l'angle β est

$$\cos(\alpha) = \frac{\dots}{\dots}$$

$$\cos(\beta) = \frac{\dots}{\dots}$$

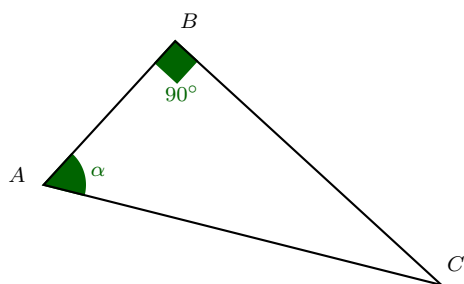
La calculatrice donne des arrondis des cosinus. Par exemple, donnez les arrondis au millième de :

- | | | | |
|--|---|---|---|
| a) $\cos(45^\circ) \approx 0,707$ | c) $\cos(28^\circ) \approx \dots\dots\dots$ | e) $\cos(83^\circ) \approx \dots\dots\dots$ | g) $\cos(0^\circ) \approx \dots\dots\dots$ |
| b) $\cos(4^\circ) \approx \dots\dots\dots$ | d) $\cos(72^\circ) \approx \dots\dots\dots$ | f) $\cos(12^\circ) \approx \dots\dots\dots$ | h) $\cos(90^\circ) \approx \dots\dots\dots$ |

IV - Sinus et tangente

De la même manière qu'on définit le cosinus, on définit deux autres fonctions : le sinus et la tangente. Le principe est le même, c'est un rapport de longueurs dont la valeur ne dépend que de l'angle.

Définition



Dans un triangle ABC rectangle en B , le sinus de l'angle $\widehat{BAC}$ est défini par le quotient :

$$\sin(\widehat{BAC}) = \frac{CB}{AC} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$$

et la tangente de l'angle $\widehat{BAC}$ est défini par le quotient :

$$\tan(\widehat{BAC}) = \frac{CB}{AB} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$

On peut retenir ces quotients grâce à la formule mnémotechnique :

$$\begin{array}{c} \sin = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} \quad \leftarrow \text{soh} \quad \text{cah} \quad \text{toa} \rightarrow \tan = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ \cos = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} \end{array}$$

V - Calculer des longueurs

Exercice n°17 page 224

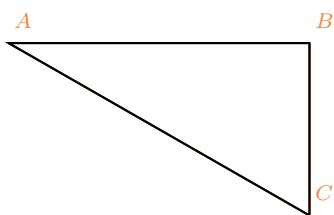
Dans le triangle ABC , rectangle en A , on sait que :

$$\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC} \quad \text{et} \quad \sin \hat{B} = \frac{AC}{BC}$$

Donc $AC = \sin \hat{B} \times BC$ et $AB = \cos \hat{B} \times BC$. En remplaçant par les valeurs on obtient :

$$AC = \sin 35^\circ \times 9 \approx 5,162187927 \text{ cm et } AB = \cos 35^\circ \times 9 \approx 7,372368399 \text{ cm}$$

Exercice n°7 page 222



$$1. \text{ On sait que } \sin \hat{A} = \frac{4}{5} = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{BC}{AC} \text{ et } \cos \hat{A} = \frac{3}{5} = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\text{donc } \tan(\hat{A}) = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}} = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{3}.$$

2. Si $AC = 5 \text{ cm}$, alors les numérateurs des fractions précédentes sont bien les longueurs des côté (puisque le dénominateur l'est!).

Donc $BC = 4 \text{ cm}$ et $AB = 3 \text{ cm}$.

1.

$$\sin(\hat{K}) = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{JL}{KL}$$

$$\cos(\hat{K}) = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{JK}{KL}$$

Donc si $\sin(\hat{K}) = \cos(\hat{K})$, alors $\frac{JL}{KL} = \frac{JK}{KL}$, donc $JL = JK$. Le triangle est donc isocèle en J .

2. Les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux, donc $\hat{K} = \hat{L}$, et on peut même les calculer :
La somme des angles du triangle fait 180° , donc si on note x la valeur recherchée, $180 = 90 + 2 \times x$.
Donc $\hat{K} = \hat{L} = 45^\circ$.