Volumes

I - Définition

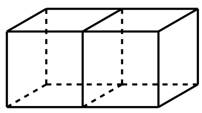
Définition

Le volume d'un solide est la mesure de l'espace contenu dans ce solide.

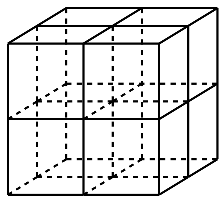
Pour pouvoir mesurer un volume, on utilise des unités de volume :

- Un mètre cube (noté m^3) est le volume contenu dans un cube dont les arêtes mesurent 1 mètre.
- Un centimètre-cube (noté cm^3) est le volume contenu dans un cube de 1 cm de côté.
- ...

Si on place deux petits cubes de $1\,cm^3$ l'un à côté de l'autre, on obtient un pavé droit de $2\,cm^3$.



Attention !
$2\,cm^3$ n'est pas le volume d'un cube de 2 cm de côté !

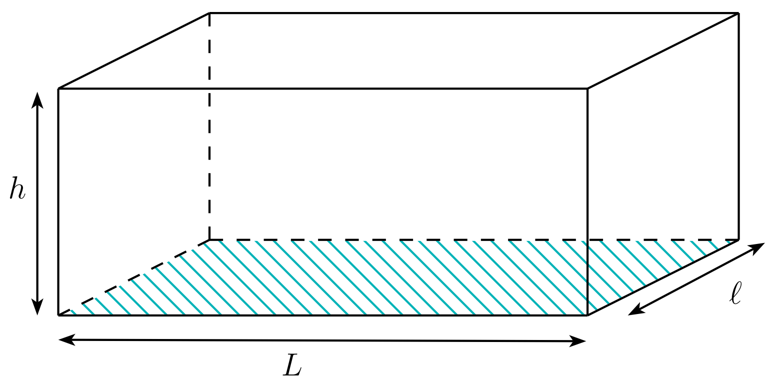


Il y a $8\,cm^3$ dans un cube de 2 cm de côté :
Volume $= 2\,cm \times 2\,cm \times 2\,cm = 2^3\,cm^3 = 8\,cm^3$

On peut découper un solide en petits cubes pour pouvoir estimer son volume.

Faire les activités de l'IREM Paris Nord : 1 (aide), 4 et 5
Facultatif : 6

II - Formules pour calculer les volumes



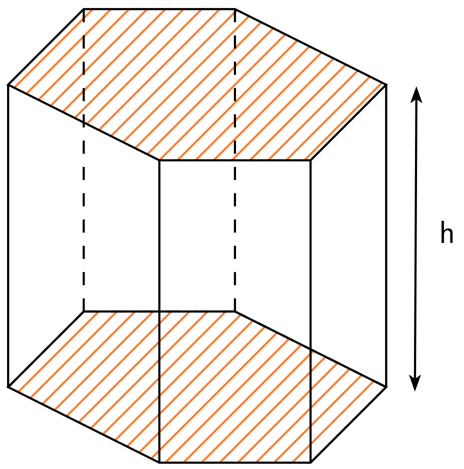
Pour un pavé droit :

Volume $= \ell \times L \times h$

Cela correspond à :

aire de la base $\times$ hauteur

L'aire de la base peut être donnée en cm^2 (l'aire est la mesure d'une surface plane, en 2 dimensions). En multipliant par une longueur en cm on a alors : $cm^2 \times$ cm $=$ cm $\times$ cm $\times$ cm $= cm^3$, ce qui est bien une unité de volume !



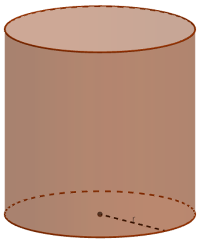
Cela se généralise à tous les prismes :

$$\boxed{\text{Volume} = \text{aire d'une base} \times \text{hauteur}}$$

Remarque

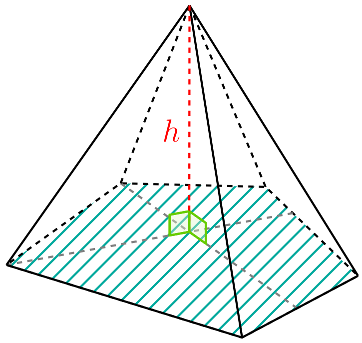
C'est la même formule pour les cônes, et comme l'aire de la base (qui est un disque) est $\boxed{\pi \times rayon^2}$*, cela donne :*

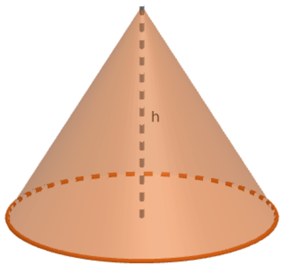
$$V_{cylindre} = \pi \times rayon^2 \times hauteur$$



Pour les pyramides :

$$\boxed{V_{\text{pyramide}} = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}}$$





Remarque

C'est la même formule pour les cônes, et comme l'aire de la base (qui est un disque) est $\boxed{\pi \times rayon^2}$*, cela donne :*

$$V_{c\hat{o}ne} = \frac{\pi \times rayon^2 \times hauteur}{3}$$

Exercices n°14 et 15 page 240 et 16 page 241

[Hors programme] Pour aller plus loin :

Pourquoi est-ce que toutes les pyramides de même base et de même hauteur (qui peuvent être différentes !) ont le même volume ? Principe de Cavalieri

Exercice n°63 page 247

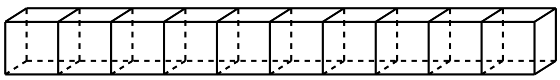
III - Changements d'unités

Le mètre cube peut se décliner avec tous les préfixes qu'on a vu dans le chapitre sur les puissances de 10.

Nom du préfixe	notation	puissance de 10
giga	G	10^9
méga	M	10^6
kilo	k	10^3
hecto	h	10^2
deca	da	10^1
déci	d	10^{-1}
centi	c	10^{-2}
milli	m	10^{-3}
micro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}

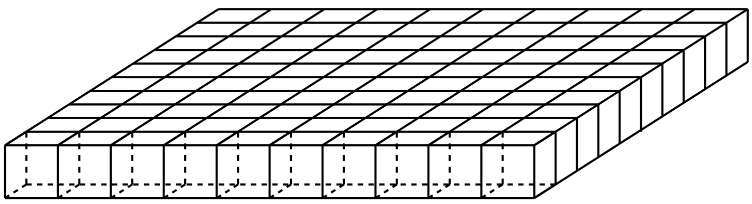
Attention : les puissances indiquées dans ce tableau valent pour passer du centimètre au décimètre par exemple, mais qu'en est-il pour passer du cm^3 au dm^3 ?

Si on met en ligne 10 petits cubes de $1\,$cm^3, on n'obtient pas un cube de 1 dm de côté, on obtient juste une ligne de 1 dm de longueur :

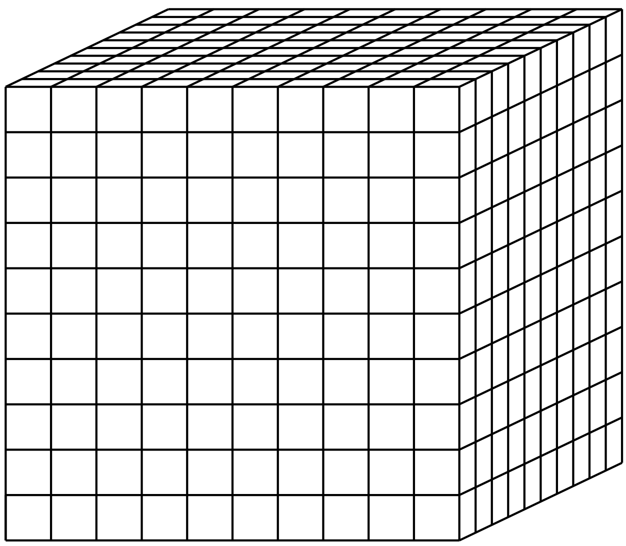


Son volume est égale à $10\,$cm^3, mais pas à $1\,$dm^3 !

Pour avoir $1\,$dm^3, il faut encore aligner cette même barre 10 fois pour former un carré de 10 sur 10 cubes...



puis il faut encore empiler ce carré 10 fois en hauteur pour obtenir un cube complet.



Combien y a-t-il de cm^3 dans $1\,$dm^3 ?

En multipliant la barre de 10 sur tout le « rez de chaussé » du cube, puis ce « rez de chaussé » sur les dix « étages », on obtient $10 \times 10 \times 10 = 1\,000$ cubes.

Conclusion : $1\,\mathbf{dm}^3 = 1\,000\,\mathbf{cm}^3$

On peut voir cela sous cet angle : $1\,\text{dm} = 10\,\text{cm}$, donc $1\,\text{dm}^3 = (10\,\text{cm})^3 = 10\,\text{cm} \times 10\,\text{cm} \times 10\,\text{cm} = 10 \times 10 \times 10\,\text{cm} \times \text{cm} \times \text{cm} = 10^3\,\text{cm}^3$

Cela vaut pour n'importe quel changement de multiple. Il suffit de remplacer le préfixe par la puissance de 10 correspondante. Par exemple :

- ⋆ $5,6\,\text{Gm}^3 = 5,6\,\text{Gm}^3 = 5,6 \times (10^9\,\text{m})^3 = 5,6 \times 10^9\,\text{m} \times 10^9\,\text{m} \times 10^9\,\text{m}$

  $= 5,6 \times 10^9 \times 10^9 \times 10^9\,\text{m} \times \text{m} \times \text{m} = 5,6 \times 10^{27}\,\text{m}^3$ (la réponse est en notation scientifique)

- ⋆ $6,2\,\mu\text{m}^3 = 6,2\,\mu\text{m}^3 = 6,2 \times (10^{-6}\,\text{m})^3 = 6,2 \times (10^{-6})^3\,\text{m}^3 = 6,2 \times 10^{-6} \times 10^{-6} \times 10^{-6}\,\text{m}^3$

  $6,2\,\mu\text{m}^3 = 6,2 \times 10^{-18}\,\text{m}^3$

DM : Problème 15 page 264 *+ énigme 60 page 247*

Le mètre cube et ses multiples sont utilisés pour des contenances (le volume d'une pièce, ...). On trouve une deuxième unité très utilisée pour les volumes : le litre (noté ℓ ou L). On l'utilise particulièrement pour les liquides.

Pour convertir un litre en mètre cube, on peut se rappeler que ça correspond à une brique de lait. C'est donc plus grand que le cm^3 mais nettement plus petit que le mètre cube : entre les deux c'est le décimètre cube.

$$\boxed{1\ell = 1\text{dm}^3 = 1\,000\,\text{cm}^3 = 0,001\,\text{m}^3}$$

On peut aussi utiliser le tableau de conversion vu en primaire, mais c'est beaucoup plus long, et il y a plus de risques d'erreur.

km^3			hm^3			dam^3			m^3			dm^3			cm^3			mm^3		
											kL	hL	daL	L	dL	cL	mL			
								0	0	0	1	5	8	7	7	2				

Exemple d'exercice classique que vous devez savoir faire

> *Convertir $1,58772\ m^3$ en litres.*
>
> $1,58772\ m^3 = 1\,587,72\ dm^3 = 1\,587,72\ L$

Tâche complexe 2 page 253

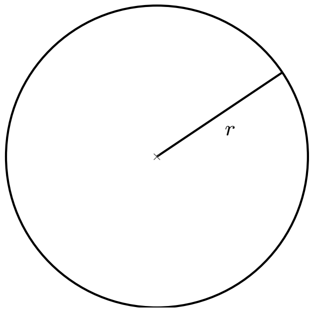
Formulaire

Périmètres

Définition

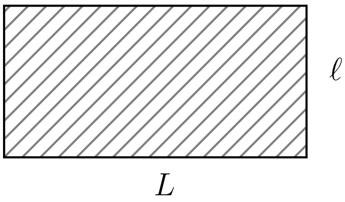
Le périmètre est la longueur du contour d'une figure.

Pour le trouver il suffit d'additionner les longueurs des côtés. Il n'y a qu'une formule à connaître :

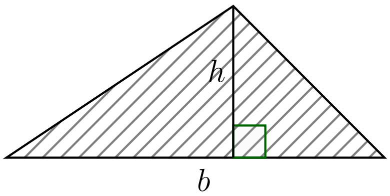


Périmètre du cercle $= 2\pi r$

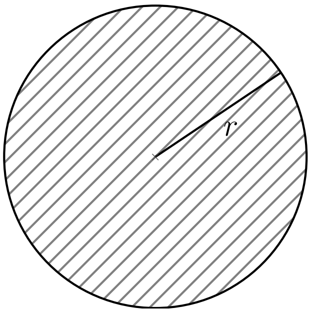
Aires



Aire du rectangle $= L \times \ell$



Aire du triangle $= \dfrac{b \times h}{2}$

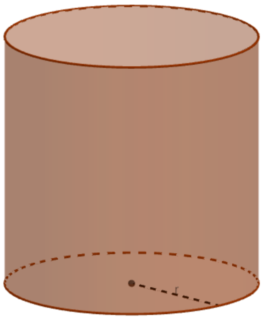


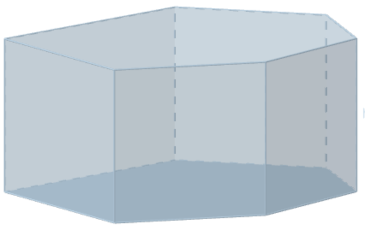
Aire du disque $= \pi r^2$

Volumes

Les volumes des prismes et cylindres se calculent avec la formule :

Volume $=$ Aire de la base $\times$ hauteur





Les volumes des pyramides et cônes se calculent avec la formule :

Volume $= \dfrac{\text{Aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$