Sommes de fractions

I - Définition (rappels)

Définition

Le nombre $\frac{1}{3}$ est le nombre qu'il faut prendre 3 fois pour obtenir 1

Autrement dit : $\frac{1}{3} \times 3 = 1$.

Cette écriture des nombres permet d'écrire précisément des nombres qu'on ne pouvait pas écrire avant. En effet, $\frac{1}{3}$ est le quotient de 1 par 3 (c'est à dire le résultat de $1 \div 3$).

Or, si on pose la division, on se rend compte qu'on aura toujours le même reste (1), on déscend un 0, donc on ajoute un 3 et il reste à nouveau 1, etc.

Si on voulait donner une écriture décimale de $\frac{1}{3}$, on ne pourrait qu'en donner un **arrondi** :

$$\frac{1}{3} \approx 0,333333333333333...$$

Fractions qui ont une écriture décimale	Fractions qui n'ont pas d'écriture décimale
$\frac{1}{2} = 0,5$; $\frac{1}{5} = 0,2$	$\frac{2}{3} \approx 0,6666666667$
$\frac{1}{8} = 0,125$	$\frac{1}{11} \approx 0,090909090909$
$\frac{3}{8} = 0,375$; $\frac{8}{5} = 1,6$	$\frac{78}{113} \approx 0,6902654867$

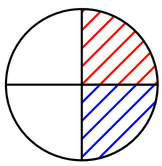
Remarque

La calculatrice ne peut afficher qu'un certain nombre de décimales. Elle fait donc des **arrondis**.

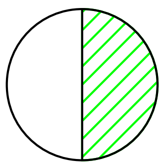
Si on fait $0,6902654867 \times 113$, on ne trouve pas 78 mais $77,9999999971$; ce qui montre bien que le résultat décimal était un arrondi.

II - Simplification (rappels)

On peut désigner une même quantité avec des fractions différentes :

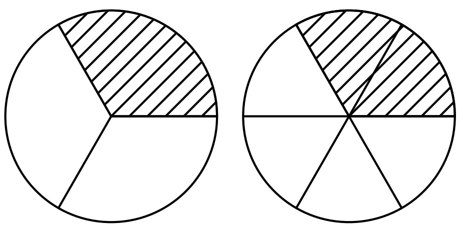


$\frac{2}{4}$



$\frac{1}{2}$

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$



$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$

Quand on coupe en deux chaque "part", on multiplie par deux le nombre total de parts (donc le dénominateur).

Ainsi, quand on multiplie le dénominateur et le numérateur par le même nombre, on ne change pas la valeur de la fraction :

$$\frac{5}{3}=\frac{5\times 2}{3\times 2}=\frac{10}{6}=\frac{5\times 3}{3\times 3}=\frac{15}{9}$$

Cette propriété permet de simplifier des fractions :

- $\frac{120}{144}=\frac{60\times 2}{72\times 2}=\frac{60}{72}=\frac{15\times 4}{18\times 4}=\frac{15}{18}=\frac{3\times 5}{3\times 6}=\frac{5}{6}$
- $\frac{472}{358}=\frac{236\times 2}{179\times 2}=\frac{236}{179}$

À retenir

Une fraction a des nombres entiers au numérateur et au dénominateur. Si on divise le numérateur et le dénominateur par un même nombre mais qu'on trouve des valeurs décimales, on n'a plus une fraction, mais une **écriture fractionnaire**. *Or, quand on vous demande de simplifier une fraction, il faut que la réponse soit une fraction.*

Exemple

$\frac{3}{12}=\frac{1}{4}=\frac{0,5}{2}$ *mais on laisse* $\frac{1}{4}$ *comme résultat final car* $\frac{0,5}{2}$ *n'est pas une fraction.*

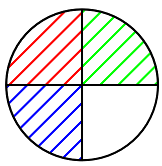
Il est utile pour simplifier des fractions de se souvenir des **critères de divisibilité** vus en 6$^{\text{ème}}$:
Un nombre est divisible par

- 2 s'il est pair (s'il finit par 0, 2, 4, 6 ou 8)
- 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3 (exemple : 687 est divisible par 3 car $6+8+7=21$ et $2+1=3$)
- 4 si les deux derniers chiffres du nombre sont dans la table de 4 (exemple : $4\,654\,516$ est divisible par 4 car 16 l'est)
- 5 s'il finit par un 0 ou un 5
- 9 si la somme de ses chiffres fait 9 (exemple $6\,687$ est divisible par 9 car $6+6+8+7=27$ et $2+7=9$)
- 10 s'il se termine par un zéro.

III - Additions

Avec les représentations "en camembert" que vous connaissez déjà, on peut comprendre comment additionner des fractions :

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$



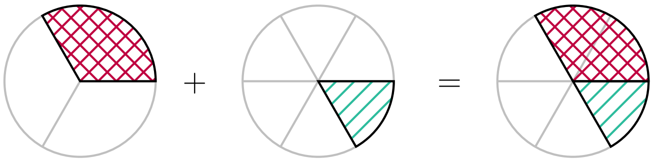
Il n'y a que les numérateurs qui s'ajoutent :

- dans **numér**ateur, il y a la même racine que **nombre** : c'est le numérateur qui indique combien il y a de portions
- dans dé**nom**inateur, il y a **nom** : c'est le dénominateur qui indique la taille de la portion.

Le calcul $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}$ correspond à : 1 demi + 3 demis = 4 demis !

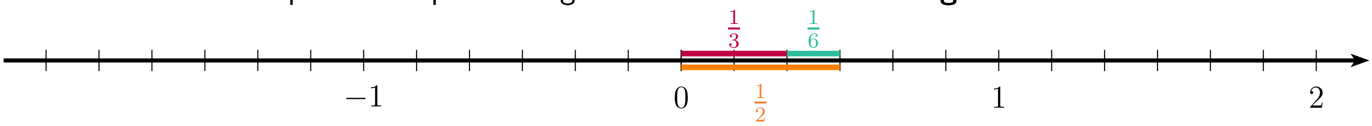
IV - Additions avec des dénominateurs différents

Comment faire pour effectuer $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}$?



La réponse semble être $\dfrac{1}{2}$, mais comment retrouver ce résultat par un calcul ? (on ne pourra faire des dessins de camembert à chaque fois qu'on a une somme de fractions à faire !)

On peut aussi utiliser la droite graduée pour vérifier que les additions de fractions fonctionnent ainsi : les **fractions** sont alors représentées par des segments dont elles sont la **longueur**.



L'idée est que la part correspondant à $\dfrac{1}{3}$ peut être coupée en deux : $\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{6}$, on a alors des sixièmes, on peut effectuer le calcul :

$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{2}{6}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{3\times 1}{3\times 2}=\dfrac{1}{2}$.

Exemples

a) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{5}{6}=\dfrac{2}{6}+\dfrac{5}{6}=\dfrac{7}{6}$

b) $\dfrac{3}{5}+\dfrac{6}{10}=\dfrac{6}{10}+\dfrac{6}{10}=\dfrac{12}{10}=1,2$

c) $\dfrac{8}{9}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{8}{9}+\dfrac{6}{9}=\dfrac{14}{9}$

d) $\dfrac{1}{15}+\dfrac{7}{30}=\dfrac{2}{30}+\dfrac{7}{30}=\dfrac{9}{30}=\dfrac{3\times 3}{3\times 10}=\dfrac{3}{10}=0,3$

e) $\dfrac{6}{5}-\dfrac{6}{15}=\dfrac{18}{15}-\dfrac{6}{15}=\dfrac{12}{15}=\dfrac{3\times 4}{3\times 5}=\dfrac{4}{5}$