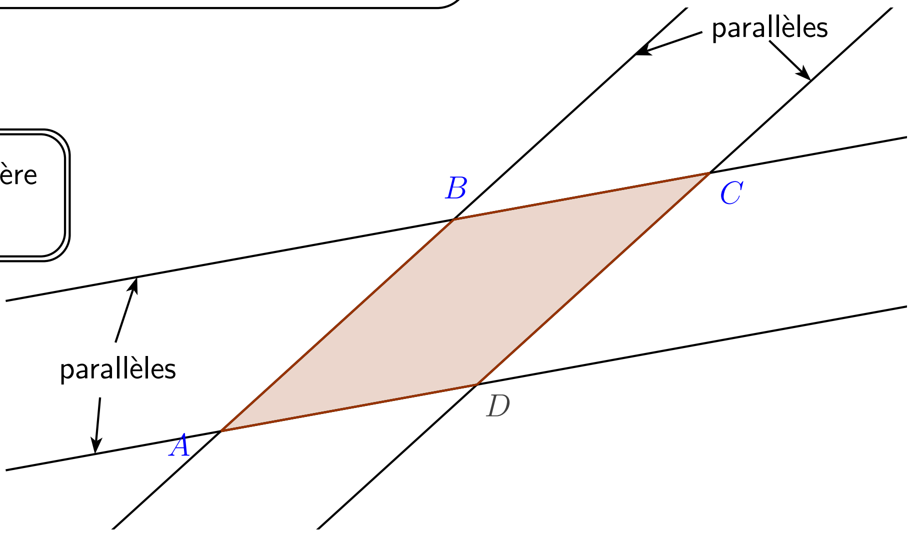
Parallélogrammes

I - Définition

Un **parallélogramme** est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.



Remarque

Nous avons déjà rencontré des quadrilatères qui sont dans la grande famille des parallélogrammes :

- *les carrés*
- *les rectangles*
- *les losanges*

Ils ont tous leurs côtés opposés parallèles, donc ce sont tous des parallélogrammes.
*On dit que ce sont des « **parallélogrammes particuliers** ».*

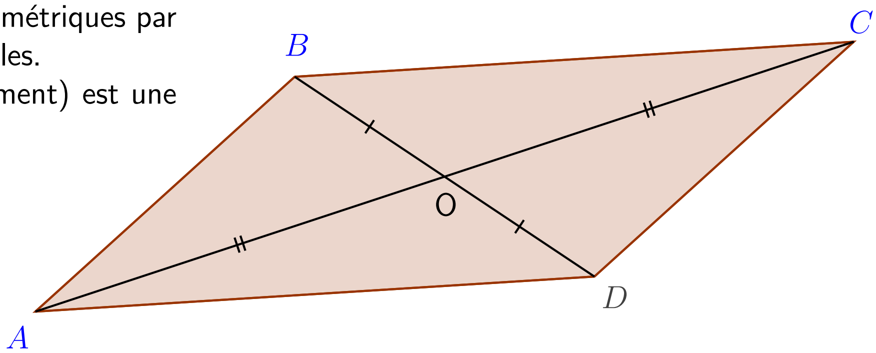
Tout ce qu'on va écrire dans ce chapitre est vrai pour **tous** *les parallélogrammes : particuliers et quelconques.*

II - Propriétés

a. Diagonales

Imaginons qu'on a un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu. Que peut-on en déduire ?

On peut en déduire que [AB] et [CD] sont symétriques par rapport au point O, intersection des diagonales.
Or, le symétrique d'une droite (ou d'un segment) est une droite (ou un segment) qui lui est parallèle.
Donc $(AB)//(CD)$
Le même raisonnement avec les côtés [BC] et [AD] montre que $(BC)//(AD)$.
On en déduit le théorème :

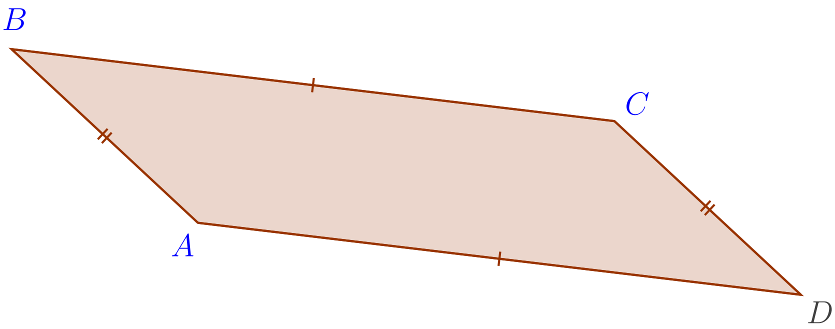


$\Rightarrow$ Un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu est forcément un parallélogramme.
La réciproque est également vraie :
$\Leftarrow$ Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

b. Longueur des côtés

Nous avons vu précédemment que le point d'intersection des diagonales est le centre de symétrie de n'importe quel parallélogramme. La propriété de conservation des longueurs par la symétrie centrale nous permet donc d'affirmer que :

$\Rightarrow$ Les côtés opposés d'un parallélogramme ont les mêmes longueurs.
La réciproque est également vraie :
$\Leftarrow$ Un quadrilatère qui a ses côtés opposés de même longueur est forcément un parallélogramme.

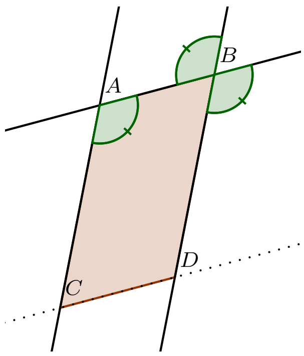


Remarque

Cette propriété permet de construire des droites parallèles (une paire de côtés opposés) en utilisant un compas (pour reporter les longueurs égales).

Cette méthode est bien plus précise que de faire glisser l'équerre sur la règle !

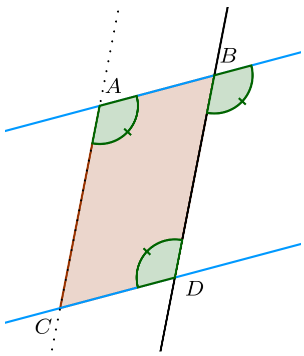
c. Angles



Une paire de côtés opposés avec un autre côté forment des angles alternes-internes (ou correspondants) égaux (puisque les côtés opposés sont parallèles !).
On peut donc affirmer que :

Les angles consécutifs d'un parallélogramme sont supplémentaires*.

* *angles supplémentaires : leur somme est un angle plat (180°).*

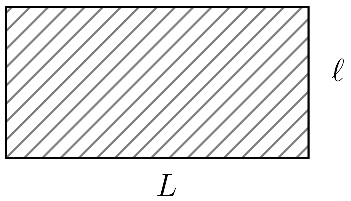


En prenant les deux autres côtés opposés parallèles et un troisième côté pour sécante, on obtient également que :

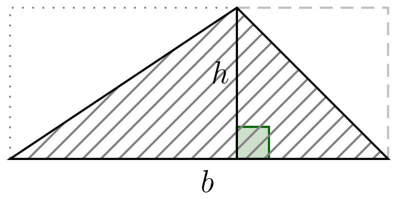
Les angles opposés d'un parallélogramme ont la même mesure.

III - Aire du parallélogramme

a. Rappels de formules



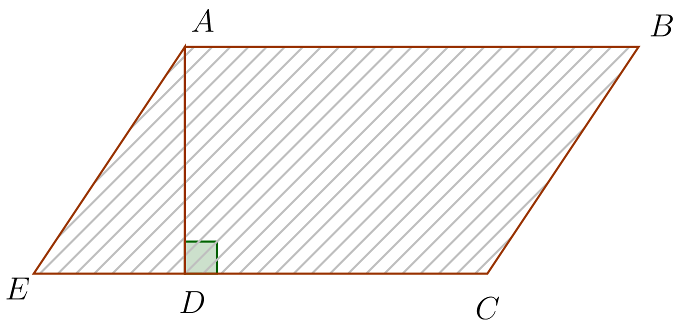
Aire du rectangle $= L \times \ell$

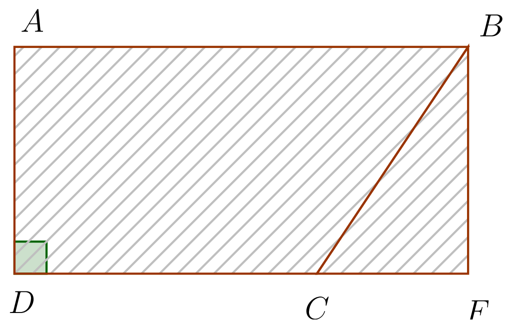


Aire du triangle $= \dfrac{b \times h}{2}$

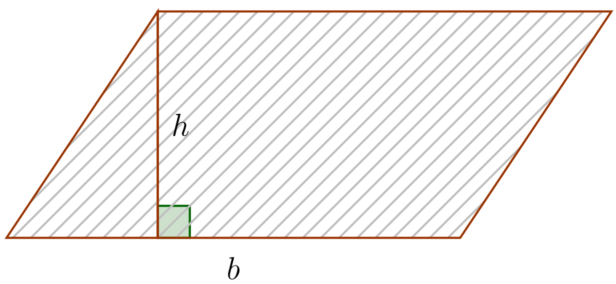
b. Découpage du parallélogramme

En traçant une **hauteur*** du parallélogramme, on le découpe en un triangle rectangle et un trapèze. En décalant ce triangle rectangle, on obtient un rectangle que a la même aire que le parallélogramme de départ :
* *segment qui passe par un sommet et coupe un côté opposé de façon perpendiculaire.*





Ainsi la formule pour calculer l'aire du parallélogramme est la même que celle du rectangle, mais au lieu de prendre les côtés, on prend la **hauteur** et la **base** associée à cette hauteur.



Aire du parallélogramme $= b \times h$