Simplifier une expression littérale

I - Rappels : définitions

On peut utiliser une ou des lettres pour faire des calculs. Chaque lettre remplace une valeur que l'on ne connaît pas, ou qui peut changer.

Définition

Une expression littérale *est un enchaînement d'opérations qui peut contenir des nombres et des lettres.*

Une lettre présente dans une expression littérale s'appelle :

- *une* **variable** *si sa valeur est amenée à changer,*
- *une* **inconnue** *si sa valeur est fixe (c'est juste qu'on ne la connaît pas).*

Exemples

$24 \times x$ $5 + x \times 6$ $9 \times y - 7$ $\dfrac{3+a}{5}$

S'il n'y a pas de contexte (comme c'est le cas dans cet exemple), on ne peut pas savoir si on manipule une variable ou une inconnue.

II - Simplifications d'écriture

Comme la multiplication permet de compter les objets, on n'écrit pas les signes $\times$ entre un nombre et une lettre (au même titre qu'on ne dit pas « J'ai deux fois une pomme », mais « J'ai deux pommes »).

De plus, dans le langage, les quantité sont données avant (« j'ai deux pommes » et pas « j'ai pommes deux »), donc on place les nombres avant les lettres.

Exemples

$\star$ $2 \times x$ *s'écrit tout simplement* $2x$

$\star$ $6 \times a \times a$ *s'écrit* $6a^2$ *(on lit « 6 a au carré »)*

$\star$ $(5 + 2 \times y) \times 8$ *s'écrit* $8(5 + 2y)$ *(on lit « 8* **facteur de** *5 plus 2 y »)*

Règles :

On n'écrit pas le signe $\times$ s'il n'est pas entre deux nombres.

Dans un produit, on écrit le nombre avant la lettre.

On n'écrit pas $1x$ mais juste x.

Lorsqu'on multiplie une lettre par elle-même, on utilise le carré ($x \times x = x^2$) et le cube ($x \times x \times x = x^3$).

Si une expression contient encore un signe $\times$, c'est qu'elle n'est pas complètement simplifiée.

Exemple

$2x \times 3$ n'est qu'à moitié simplifiée...
C'est un produit qui contient 3 facteurs : $2x \times 3 = 2 \times x \times 3$. On peut échanger l'ordre des facteurs !
$2 \times x \times 3 = \underbrace{2 \times 3} \times x = 6 \times x = 6x$

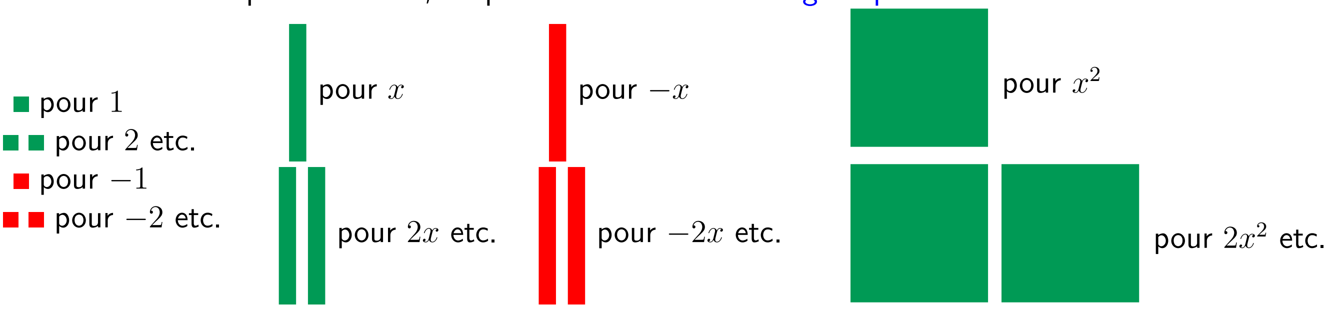
Exercices sur feuille

III - Réduire une expression littérale

On sait que $7+7+7+7+7 = 5 \times 7$, de même $x+x+x+x+x = 5x$.
Lorsqu'on regroupe les x ensemble, on **réduit** l'expression littérale.

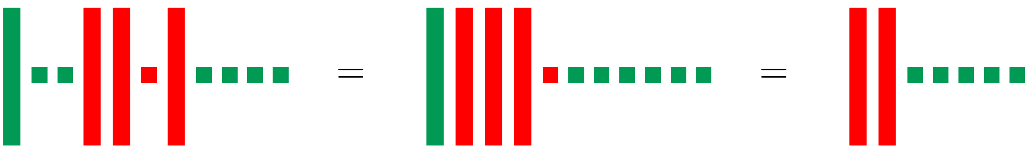
Par contre, on ne peut pas « compter ensemble » des x avec des unités :
L'expression « $2x + 3$ » est déjà réduite au maximum : le 2 indique le nombre de x alors que le 3 indique le nombre d'unités.

Pour bien se représenter cela, on peut utiliser des tuiles algébriques :



Additionner les termes revient à regrouper les tuiles algébriques ensemble, on peut donc réorganiser les tuiles comme on le souhaite. Comme dans le chapitre sur les nombres relatifs, une tuile verte et une tuile rouge de même forme **s'annulent**.

Par exemple, pour réduire l'expression $x + 2 - 2x - 1 - x + 4$:



Donc $x + 2 - 2x - 1 - x + 4 = -2x + 5$

On peut aussi souligner de manières différentes les termes qui comptent des unités, ceux qui comptent des x et ceux qui comptent des x^2 :
$x^2 - 6 + 2x - 3 + x - 4x^2 = x^2 - 6 \underline{+2x} - 3 \underline{+x} - 4x^2 = -4x^2 \underline{+3x} - 9$

Exemple

Réduire les expressions suivantes :

a) $5 + x - 4 + 3x$ *b)* $x \times x + 2x - x^2$ *c)* $x^2 + x + 1$ *d)* $4x+17+6x+12-x$

a) $5 + x - 4 + 3x = 5 - 4 + x + 3x = 1 + 4x$

b) $x \times x + 2x - x^2 = x^2 + 2x - x^2 = 2x$

c) $x^2 + x + 1$ est déjà réduite !

d) $4x + 17 + 6x + 12 - x = 29 + 9x$

IV - Remplacer une lettre par une valeur

Vous allez avoir de nombreux exercices dont la consigne ressemble à :

Calculer l'expression $5x - 3$ pour $x = 2$.

« $x = 2$ » signifie qu'on peut **remplacer** x **par** 2 à n'importe quel endroit. On va donc remplacer x par 2 dans l'expression qu'on me demande de calculer.

Pour répondre à l'énoncé encadré, je dois écrire dans mon cahier :

Pour $x = 2$, on a $5x - 3 = 5\times 2 - 3 = 10 - 3 = 7$.

Attention aux signe $\times$ entre deux nombres ! En effet $5 \times 2 \neq 52$! Il faut donc bien se souvenir quand on remplace x par 2 que $5x$ signifie $5 \times x$, on ne peut plus sous-entendre le $\times$ quand il n'y a plus de lettres.

Attention : bien souvent, la lettre correspond à une **variable**, cela signifie qu'on peut la remplacer par des valeurs différentes, même dans un même exercice.

Par exemple :

$$\left.\begin{array}{l}\text{Pour } x = 6\text{, on a } 5x - 3 = 5 \times 6 - 3 = 30 - 3 = 27.\\ \text{Pour } x = 10\text{, on a } 5x - 3 = 5 \times 10 - 3 = 50 - 3 = 47.\end{array}\right\}\ \text{Cela ne veut pas dire que } 27 = 47\,!$$

Il est donc important de bien écrire ce qu'on est en train de calculer et pour quelle valeur de x, et de faire des phrases distinctes.

Exercice n°18 page 104

V - Tester une égalité

Définition

Deux expressions (littérales ou non) séparées par un signe égal forment une **égalité**. *L'expression à gauche du signe égal s'appelle* **le membre de gauche**, *et celle à droite s'appelle* **le membre de droite**.

$$\underbrace{4x - 2}_{\textit{membre de gauche}} = \underbrace{8 - 7x}_{\textit{membre de droite}}$$

Une égalité peut être vraie, fausse ou parfois vraie et parfois fausse.

Exemples

- *L'égalité « $5 \times x = 5x$ » est vraie puisque c'est juste une simplification d'écriture. C'est également le cas des égalités : « $x + x = 2x$ », « $2 + x = x + 2$ », ...*
- *L'égalité « $x + 1 = x - 1$ » est fausse, quelque soit la valeur choisie pour x puisque ajouter 1 n'est pas la même chose que soustraire 1*
- *L'égalité $x^2 = x$ est vraie pour $x = 0$, fausse pour $x = 2$, saurez-vous trouver une autre valeur pour laquelle cette égalité est vraie ?*

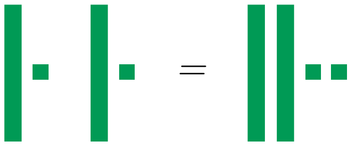
Réponse : pour $x = 1$.

La question « Cette égalité est-elle vraie ? » a pour réponse oui si l'égalité est **vraie pour toutes les valeurs possibles** de x.

Exemple

Prouver que l'égalité « $2(x+1) = 2x+2$ » est vraie.

Si on représente le membre de gauche à l'aide de tuiles algébriques, on peut voir les parenthèses comme un sac : dans ce sac il y a  *. Ce sac est multiplié par deux, ce qui donne :*



ce qui correspond bien au membre de droite !

Sans utiliser les tuiles algébriques, on peut démontrer cette égalité en utilisant la définition de la multiplication :

$$\begin{aligned} 2(x+1) &\overset{\text{déf}}{=} (x+1)+(x+1) && \textit{définition de } \times 2 \\ &= x+1+x+1 && \textit{puisque les parenthèses sont inutiles lorsqu'il n'y a que des additions} \\ &= x+x+1+1 && \textit{on peut changer l'ordre des termes lorsqu'il n'y a que des additions} \\ &= 2x+2 && \textit{on a juste réduit l'expression littérale} \end{aligned}$$

L'égalité qu'on a prouvée correspond à la propriété de la **distributivité** de la multiplication sur l'addition. On peut le voir simplement comme le fait que le 2 qui est multiplié à la parenthèse est finalement multiplié à tous les termes dans la parenthèse :

Distributivité

$$3\,(\,x \;+\; 2\,) \;=\; 3x \;+\; 6$$

*Exercices n°31 puis 28 page 106 et **36** et 38 page 107*