Mme Toromanoff

Collège Jean Mermoz

Symétrie centrale

I - Définitions

Une symétrie est caractérisée par le fait que le symétrique du symétrique est la figure de départ.
La symétrie **axiale** se fait pas par rapport à un **axe** (une **droite**).

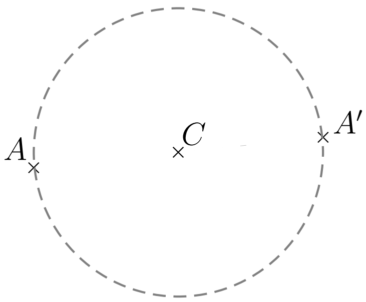
La symétrie **centrale** se fait pas par rapport à un **centre** (un **point**).

Si nous devions inventer une telle symétrie, que pourrions-nous faire ?
Traçons par exemple le symétrique de A par rapport au centre C :

Pour le cas très simple où l'on trace le symétrique d'un point, il suffit de prolonger la demi-droite $[AC)$ et de reporter la longueur AC de l'autre côté du point C.

Définition :

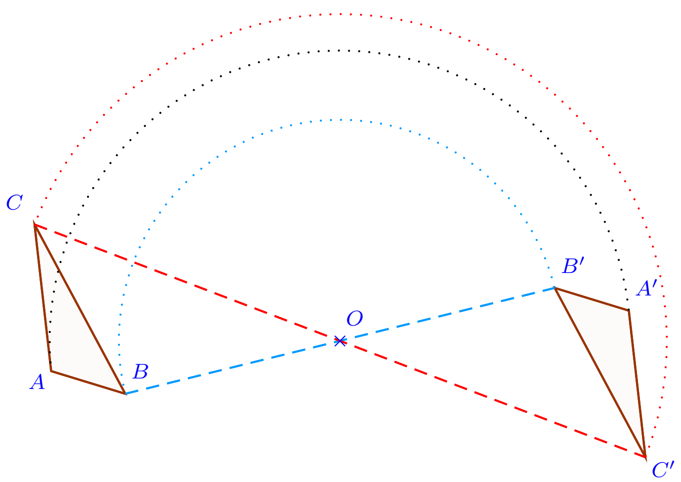
Le point A' est le **symétrique de A par rapport au point C**, si **le point C est le milieu du segment** $[AA']$.



Dans cette situation (lorsque le cercle est tracé), on dit que les points A et A′ sont ***diamétralement opposés****. En effet, le segment $[AA']$ est un diamètre du cercle.*

Exercice n°16 page 168

La symétrie axiale correspond à un pliage le long de l'axe. La symétrie centrale a-t-elle aussi une image de mouvement qui permet de la caractériser ?
Regardons ce que donne le symétrique du triangle ABC par rapport au point O :



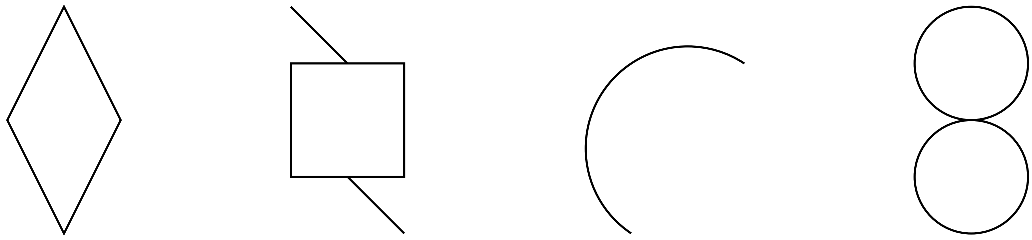
Le symétrique du triangle ABC est un triangle identique à ABC, mais qu'on a fait **tourner d'un demi-tour autour du point O**.

Exercices n°14 puis n°13 page 168, n°18 page 169 et n°22 page 169

Définition :

Une figure a un **centre de symétrie** si son symétrique par rapport à ce point est la figure elle même.

Dans les 4 figures suivantes, trace en rouge le centre de symétrie s'il existe et en bleu l'(es) axe(s) de symétrie s'il y en a.



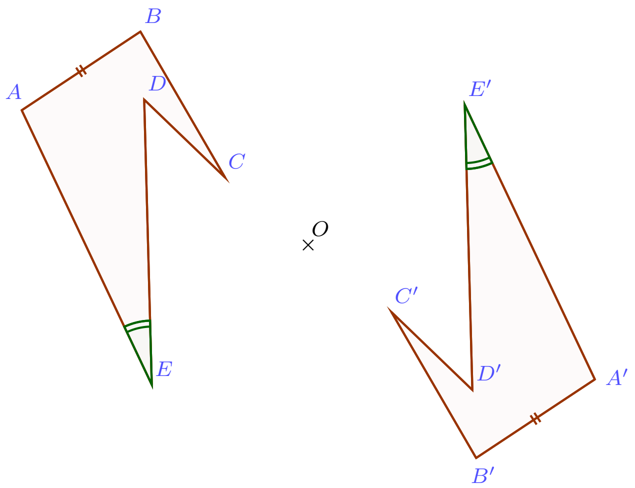
Exercice n°23 page 169, n°28 et 29 page 171, n°51 page 147

II - Propriétés de la symétrie centrale

Lorsqu'on fait faire un demi-tour à une figure, elle ne change pas de forme, ni de longueurs, ni d'aire. La symétrie centrale a donc les mêmes propriétés de conservation que la symétrie axiale :

La symétrie centrale conserve :
- les longueurs
- les mesures d'angles
- les aires

Exemple



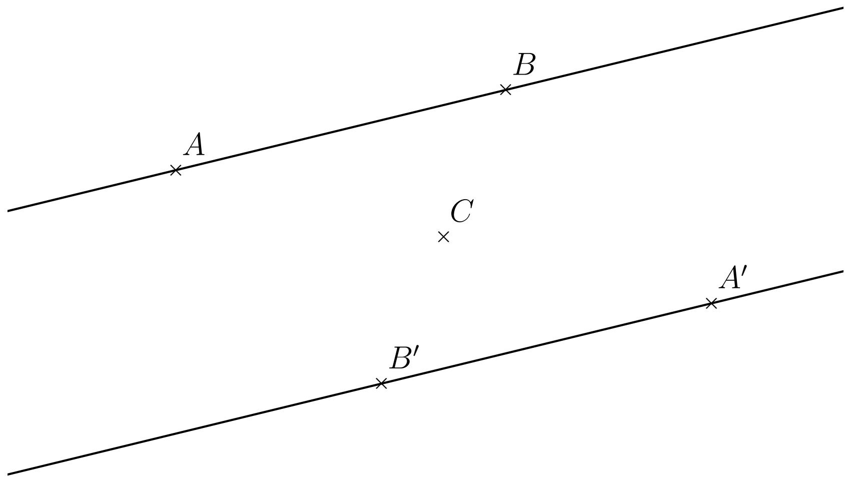
Par exemple sur la figure ci-contre, $A'B'C'D'E'$ est le symétrique de $ABCDE$ par rapport au point O, donc :

- $AB = A'B'$ *(les longueurs sont égales)*
- $\widehat{AED} = \widehat{A'E'D'}$ *(les angles ont même mesure)*
- $\mathscr{A}_{ABCDE} = \mathscr{A}_{A'B'C'D'E'}$ *(les aires sont égales)*

Grâce ces propriétés, on peut aussi affirmer que :

- Le symétrique d'un cercle est un cercle de même rayon
- Si trois points sont alignés, alors leurs symétriques sont aussi alignés.

La symétrie centrale a une propriété supplémentaire :



Le symétrique d'une droite par rapport à un point est une droite qui lui est **parallèle**.

Preuve (hors programme)

Pour démontrer ce théorème, nous allons faire un raisonnement par l'absurde : nous allons supposer qu'en fait elles ne sont pas parallèles et montrer qu'en fait c'est impossible.

Imaginons par exemple que sur le dessin ci-dessus, en prolongeant les deux droites très très loin à droite, elles finissent par se couper en un point I.

Comme $I \in (AB)$, son symétrique I' est sur $(A'B')$.
Comme $I \in (A'B')$, son symétrique I' est sur (AB) aussi.
Comme (AB) et $(A'B')$ ne se rencontrent qu'à un seul endroit, ça veut dire que I et I' sont en fait le même point : I est son propre symétrique.

Le seul point qui est son propre symétrique c'est le centre de symétrie (ici C).

Donc en fait, si les deux droites se coupent, ça ne peut être qu'en C.

Cela obligerait les deux droites à être confondues, puisque C est le milieu de $[AA']$, de $[BB']$, etc.

Or droites confondues ont la même direction, donc on peut considérer qu'elles sont parallèles dans un certain sens.