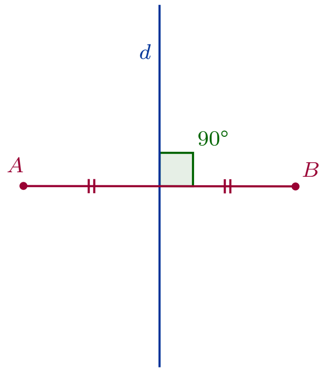
Triangles et aires

I - Droites remarquables du triangle

a. Médiatrice

Nous avons déjà vu la notion de médiatrice : lorsqu'on trace le symétrique A' d'un point A par rapport à une droite d, la droite d est la médiatrice du segment $[AA']$.

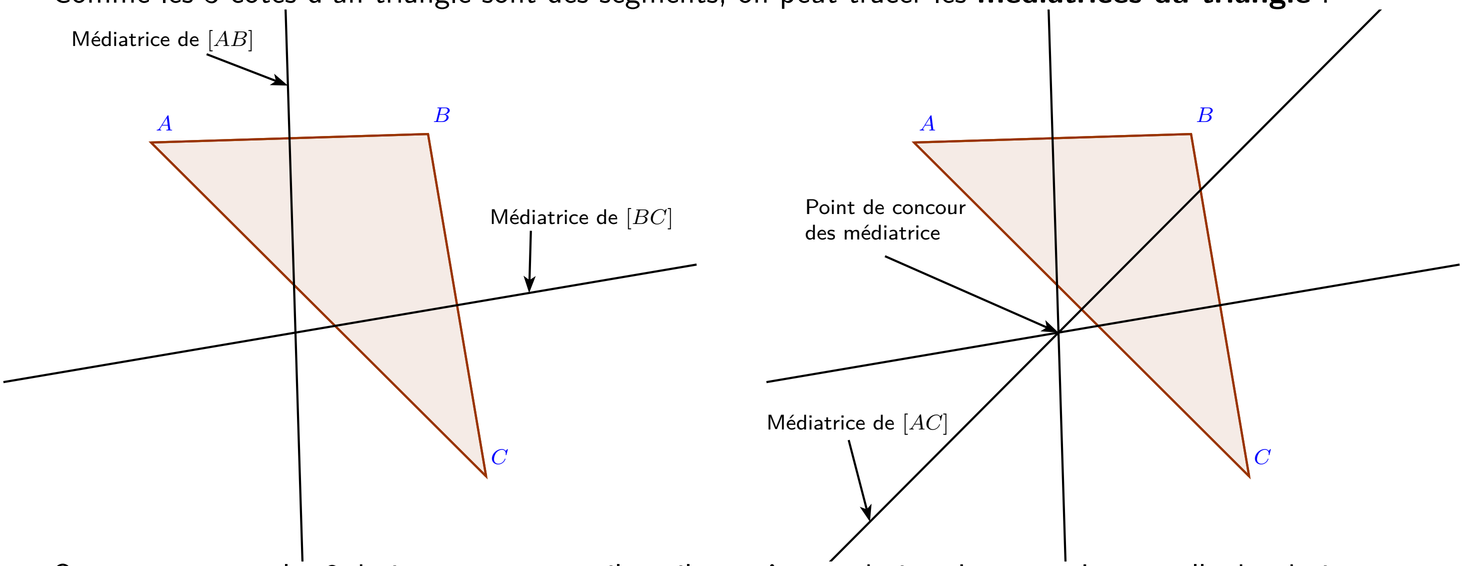


Définition

*La **médiatrice d'un segment** est la droite qui coupe ce segment **perpendiculairement en son milieu**.*

Sur le dessin ci-contre, la droite d est la médiatrice du segment $[AB]$.

Comme les 3 côtés d'un triangle sont des segments, on peut tracer les **médiatrices du triangle** :



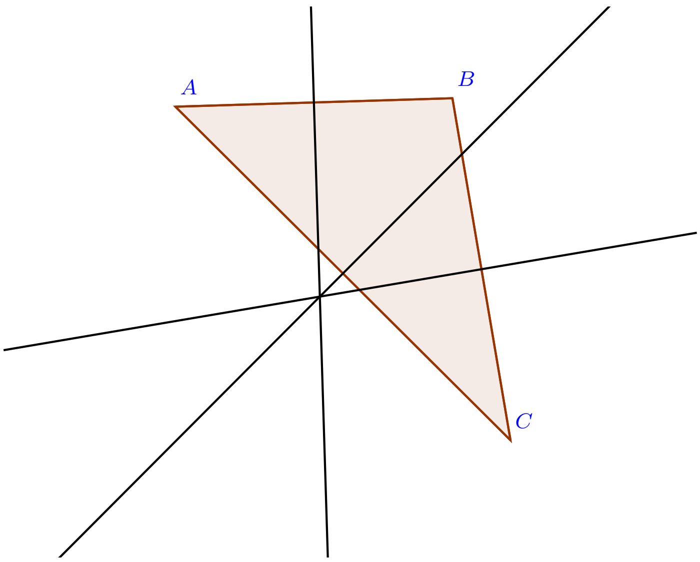
On remarque que les 3 droites se coupent pile poil au même endroit : c'est ce qu'on appelle des droites **concourantes**.

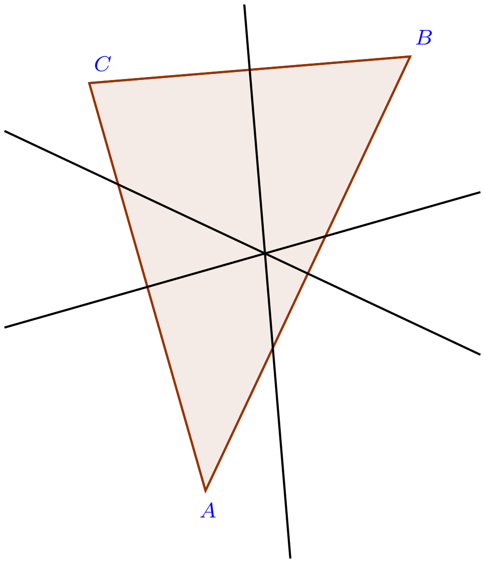
Nous avons vu **la propriété d'équidistance des médiatrices** :

La médiatrice d'un segment $[AB]$ est l'ensemble des points qui sont à la **même distance du point** A **et du point** B.

Donc le point de concours des médiatrices est à la **même** distance des 3 sommets du triangle.

Vérifions cela en traçant le cercle dont le centre est le point de concours des médiatrices et qui passe par un des sommets du triangle. On pique sur le point de concours et on écarte jusqu'à un sommet (A par exemple) puis on trace.





Ce cercle passe par les 3 sommets : c'est ce qu'on appelle **le cercle circonscrit au triangle**.

Théorème

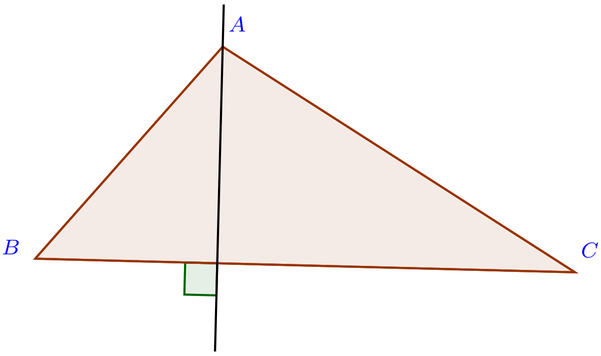
Le centre du cercle circonscrit à un triangle est le point d'intersection des médiatrices de ce triangle.

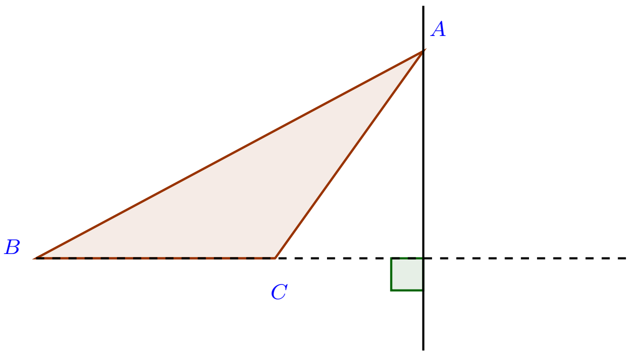
Exercice n°34 page 190

b. Hauteur

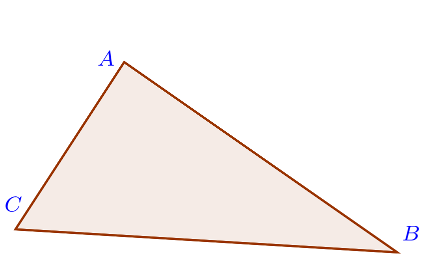
Définition

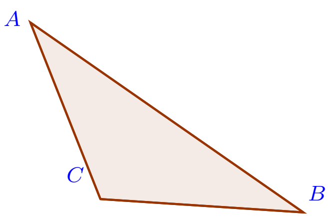
*Une **hauteur** de triangle est une droite qui passe par un sommet du triangle et qui est perpendiculaire au côté opposé.*

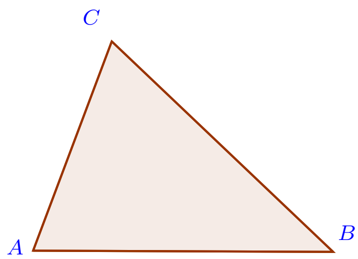




La hauteur peut être à l'extérieur du triangle.
Pour chacun des triangles suivants, tracer la hauteur issue de A.



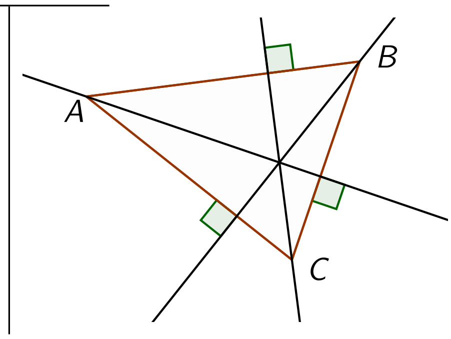




Plus généralement, le mot **hauteur** désigne la distance entre le sol et le point le plus haut d'un objet.

Dans le cas d'un triangle, le « sol » est appelé la **base** du triangle ; mais suivant laquelle des 3 hauteurs on dessine, la base est un côté du triangle différent. On parle donc de la base **relative à une hauteur**.

Exemple



Sur la figure suivante, repasser en :

1. *rouge la hauteur **issue de A***
2. *vert la hauteur **relative à la base [AC]***
3. *bleu la base **relative à la hauteur issue de C**.*

Exercices n°35 page 190, n°36, 38 et 40 page 191

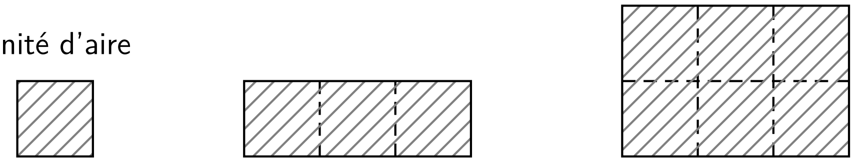
II - Calculer l'aire d'un triangle

a. Qu'est-ce qu'une aire ?

L'**aire** est la mesure d'une **surface**.

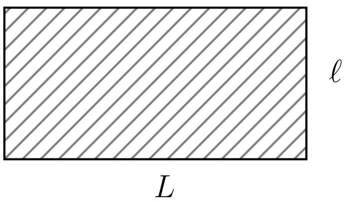
Contrairement aux **longueurs** qui s'expriment en **cm** par exemple, les **aires** elles se mesurent en **cm²**.
Une unité d'aire est donc une surface qu'on considère comme étant égale à 1. On va très souvent prendre comme unité d'aire la surface d'un carré de côté 1 cm : c'est 1 cm^2.

Unité d'aire



1 cm^2 3 cm^2 6 cm^2 $= 3 \times 2$ cm^2

On peut retrouver presque toutes les formules d'aires (à part le cercle) en partant de la formule de l'aire d'un rectangle :



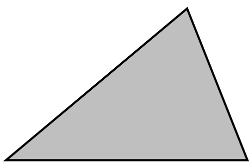
$$\mathscr{A}_{\text{rectangle}} = L \times \ell$$

Remarque : La notation $L \times \ell$ n'a de sens que si les lettre L et ℓ désignent vraiment quelque chose. Si dans l'exercice les côtés d'un rectangle mesurent par exemple x et 5, on va directement écrire $\mathscr{A}_{\text{rectangle}} = x \times 5$.

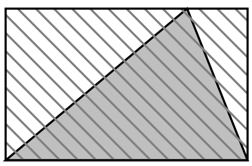
Exercices n°62 et 63 page 233

b. Aire du triangle

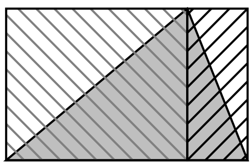
Prenons ce triangle :



On peut le mettre dans un rectangle :

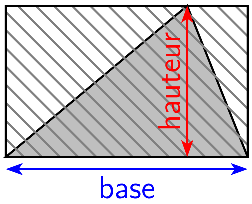


On peut découper ce rectangle en deux rectangles :



Sur la dernière figure, on peut voir que l'aire totale du triangle est égale à la moitié de chaque morceau de rectangle, et donc la moitié du rectangle total.

Pour trouver l'aire du triangle, il suffit donc de trouver l'aire de ce rectangle et de le diviser par 2 !



Pour que le rectangle soit bien ajusté sur le triangle, on a fait en sorte que sa largeur soit égale à la hauteur du triangle, et que sa longueur soit égale à la base relative à cette hauteur.

On a donc trouvé la formule de l'aire du triangle :

$$\boxed{\mathscr{A}_{\text{triangle}} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}}$$

Exercice n°23 page 228, 30 page 229 et 59 page 233