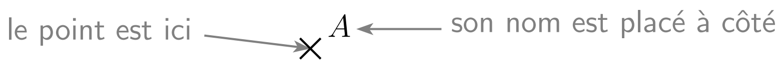
Premiers éléments de géométrie

I - Vocabulaire de géométrie

Définition

*Un **point** est une localisation, souvent représenté par une petite croix et nommé à l'aide d'une lettre (en majuscule droite).*



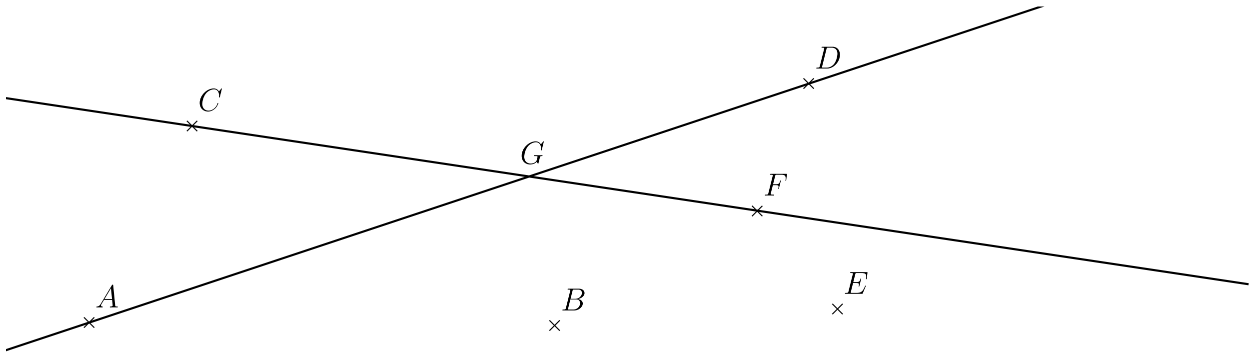
Propriété

Il existe une unique droite qui passe par deux points.

Notation

La droite qui passe par le point A et par le point B se note (AB).

*Par exemple, sur le dessin ci-dessous, on a tracé les droites (AD) et (CF). Ces deux droites se « rencontrent » au point G : le point G est le **point d'intersection** des droites (AD) et (CF). On dit qu'elles se **coupent en** G, ou encore que (AD) et (CF) sont **sécantes en** G.*



Inutile de faire une croix pour le point G : il est déjà parfaitement repéré par les droites (AD) et (CF).

Remarques

- *Une droite est infinie des deux côtés, il est donc impossible de la dessiner entièrement (elle continuerait hors de la feuille), mais on peut simplement la prolonger autant que l'on peut.*

  *Une **droite** est un ensemble de points alignés qui n'a pas d'extrémité.*

- *On trace une droite avec une **règle**.*

- *Une droite peut être nommée de plusieurs manières différentes. Par exemple (AD) et (AG) correspondent à la même droite.*

Voir l'exercice n°20 page 210

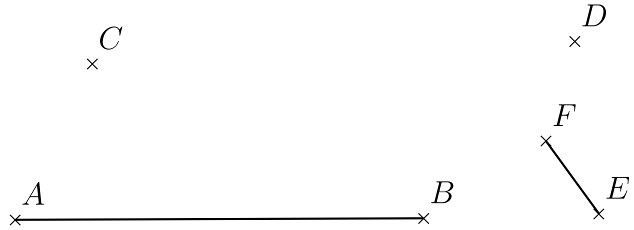
Définition

*Un **segment** est un morceau de droite qui a deux extrémités.*

Notation

Le segment dont les extrémités sont le point A et le point B se note $[AB]$.

Par exemple, sur le dessin ci-dessous, on a placé 6 points appelés A, B, C, D, E et F. Les segments $[AB]$ et $[FE]$ sont tracés, mais pas le segment $[BC]$.



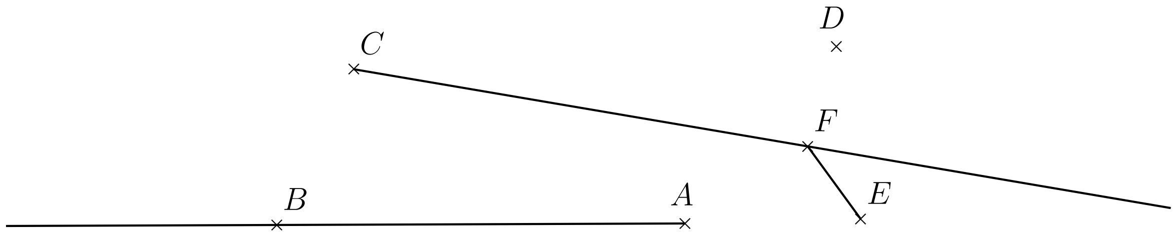
Définition

*Une **demi-droite** est un ensemble de points alignés qui est finie d'un côté, et infinie de l'autre côté.*
*Le point sur lequel la demi-droite est finie s'appelle **l'origine** de la demi-droite.*

Notation

La demi-droite d'origine A et qui passe par le point B se note $[AB)$ ou $(BA]$.

Par exemple, sur le dessin ci-dessous on a tracé les demi-droites $[AB)$ et $[CF)$ ainsi que le segment $[FE]$.

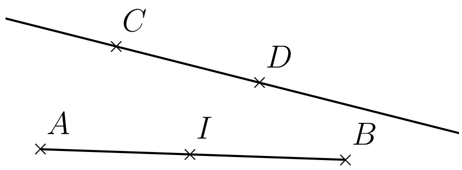


Exercice n°19 page 210

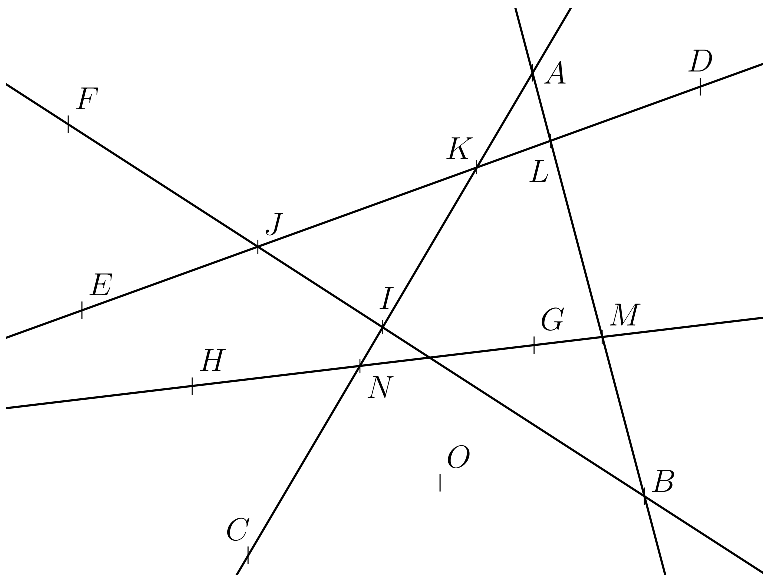
Lorsqu'un point est sur un segment, on dit que ce point **appartient à** ce segment.

Notations

« le point I appartient au segment $[AB]$ » se note « $I \in [AB]$ ».
« $A \notin (CD)$ » signifie que le point A n'est pas sur la droite (CD).



Exemple



Sur la figure ci-contre, on a :

- $J \in (EK)$
- $J \notin (AB)$
- $G \in [HM]$
- $O \notin (NB)$
- $H \in (GM)$
- $H \notin [GM]$
- $F \in (JI)$
- $F \notin [JI)$
- $F \in (JI]$
- $F \notin [JI)$

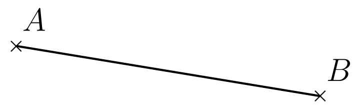
Exercices n°31 page 211 et 24 page 210

Voir le savoir faire « programme de construction » et les exercices page 208

II - Distances, longueurs

Définition

*La **distance** entre deux points est la longueur du chemin le plus court qui permet d'aller de l'un à l'autre.*



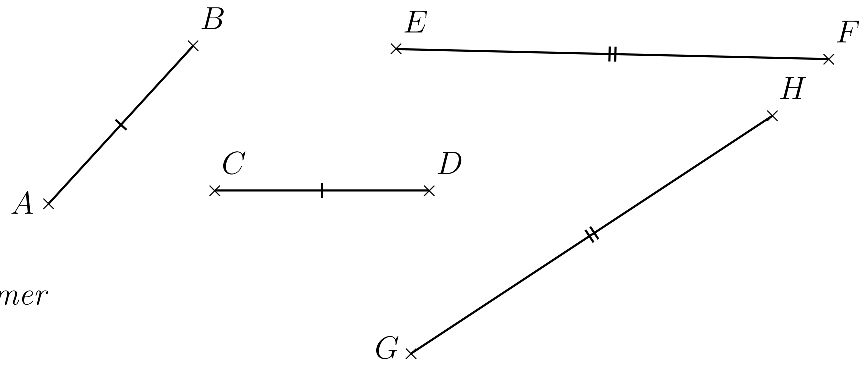
Propriété

Le segment $[AB]$ est le chemin le plus court pour aller du point A au point B.

Notation

La distance entre le point A et le point B, qui est aussi la longueur du segment $[AB]$, se note AB.

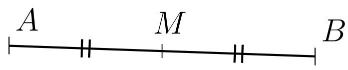
Quand deux segments ont la même longueur, on peut le montrer en faisant des **codages** :



Le codage ci-contre permet d'affirmer que $AB = CD$ et $EF = GH$.

Définition

*Le **milieu** d'un segment est le point du segment qui est à la même distance de chaque extrémité.*



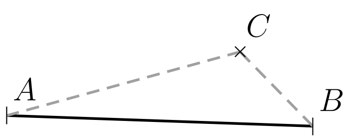
Propriété

Lorsqu'un point C est dans un segment $[AB]$, alors les points A, C et B sont **alignés**.

On peut alors affirmer que $AC + CB = AB$.

$$\boxed{\text{Si } C \in [AB] \text{ alors } AC + CB = AB.}$$

Voir les exercices n°37 page 211 et n°43 page 212



Propriété (Inégalité triangulaire)

Si $C \notin [AB]$, alors les points A, B et C ne sont **pas aligné**. *Alors $[AB]$ est le chemin le plus court pour aller du point A vers le point B, donc on peut affirmer que :* $\boxed{AC + CB > AB}$

« $>$ » signifie « est plus grand que ». C'est un des symboles qu'on utilise pour ***comparer*** *des nombres.*

Notations

« $\leqslant$ » signifie « est inférieur ou égal »

« $\geqslant$ » signifie « est supérieur ou égal »

Propriété

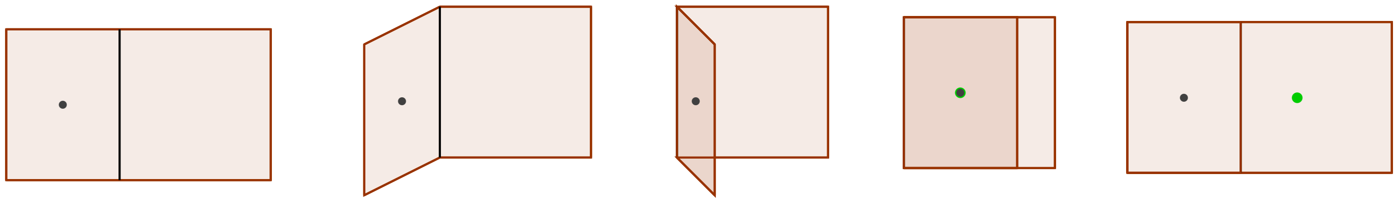
Pour n'importe quels points A, B et C, on peut affirmer que $AB + BC \geqslant AC$.

Voir les exercices n°41 page 211 et n°47 page 212

III - Parallèles et perpendiculaires

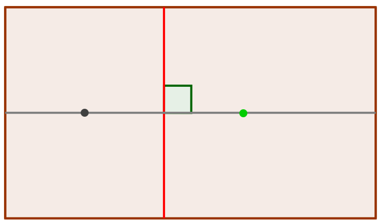
a. Perpendiculaires

Nous avons plié une feuille et fait un trou dans qui traverse les deux épaisseurs du papier.



Nous avons ensuite tracé :

- la droite le long du pli et en rouge
- la droite passant par les deux trous obtenus au crayon



Définition

La droite rouge est **perpendiculaire** *à la droite tracée au crayon.*

Notation

« La droite (AB) est perpendiculaire à la droite (CD) » se note « $(AB) \perp (CD)$ ».

Méthode : On trace des droites perpendiculaires avec une équerre ou avec une réquerre.

Voir activités informatiques « trou » et activité « perpendiculaire »

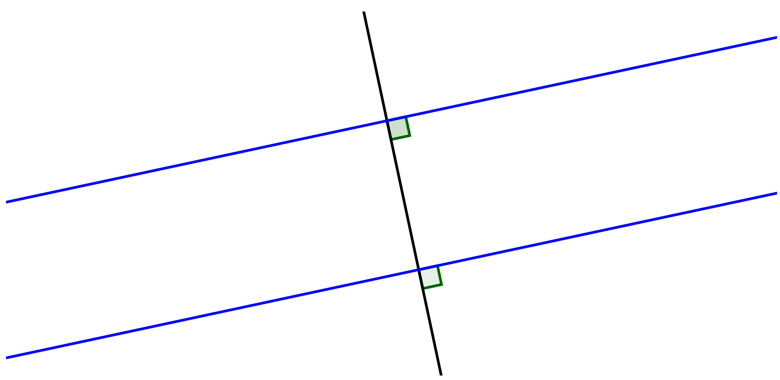
Remarque

Les deux droites forment quatre angles exactement égaux. Ce sont des **angles droits**.
Coder un seul des 4 angles est suffisant, les 3 autres le sont automatiquement.

Activités au choix pour tracer des perpendiculaires : parabole, hyperbole, elipse et faisceau

b. Parallèles

Nous avons tracé sur Geogebra une droite (en noir sur le dessin suivant). Puis grâce à l'outil « perpendiculaire », nous avons tracé deux nouvelles droites toutes les deux perpendiculaires à la première droite (en bleu sur le dessin ci-contre).



Nous avons alors remarqué que les deux droites bleues ne se coupent jamais.

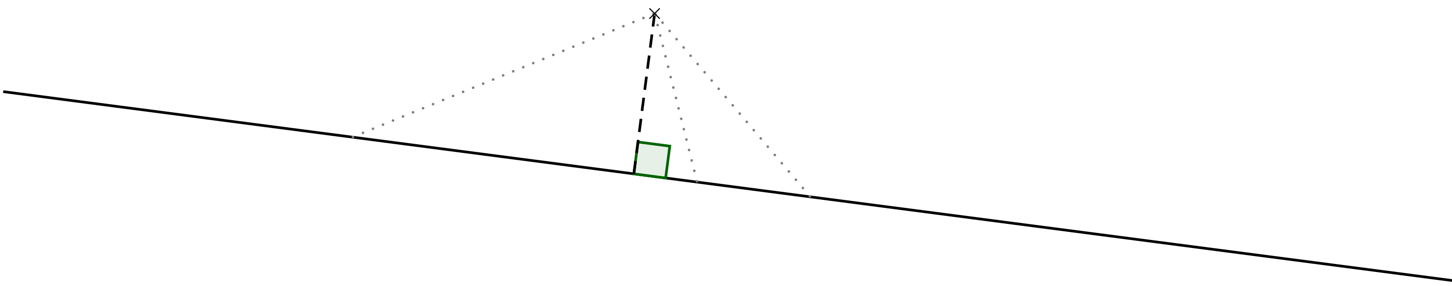
Définition

Deux droites qui n'ont pas de point d'intersection sont dites **parallèles**.

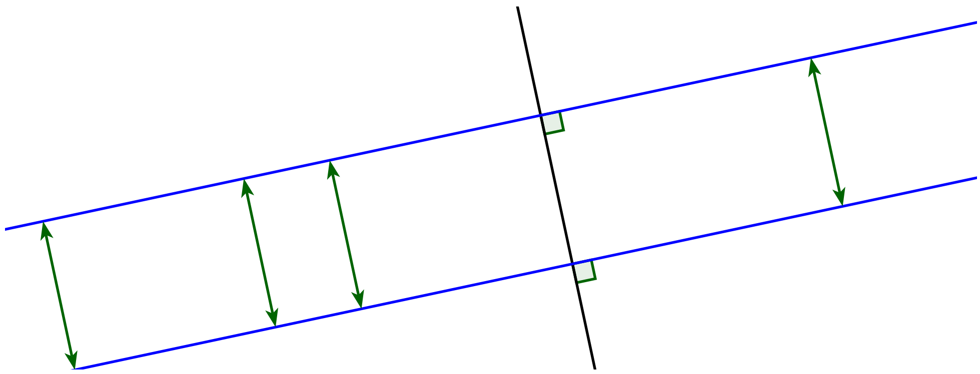
Remarque

La ***distance*** *entre deux objets est* **la plus petite longueur** *qui sépare ces deux objets.*

Par exemple, pour trouver la distance entre la droite et le point suivants, il faut mesurer le segment tracé en pointillés noirs :



L'écartement entre deux droites parallèles est toujours le même.



Tu peux t'entraîner à tracer les parallèles « à l'œil » sur cet exercice.

Notation

« La droite (AB) est parallèle à la droite (CD) » se note « $(AB) \,//\, (CD)$ ».

Axiome

Pour une droite d et un point A donnés, il existe une seule droite parallèle à d passant par le point A.

**Un axiome est un principe de base qui sert de fondation pour faire des démonstrations en géométrie.*

Méthode : tracer une parallèle (méthode « de l'ascenseur ») avec règle et équerre ou avec réquerre

Activités au choix pour tracer des parallèles : Qu'est-ce ?, ombre, Illusion 1 ou Illusion 2

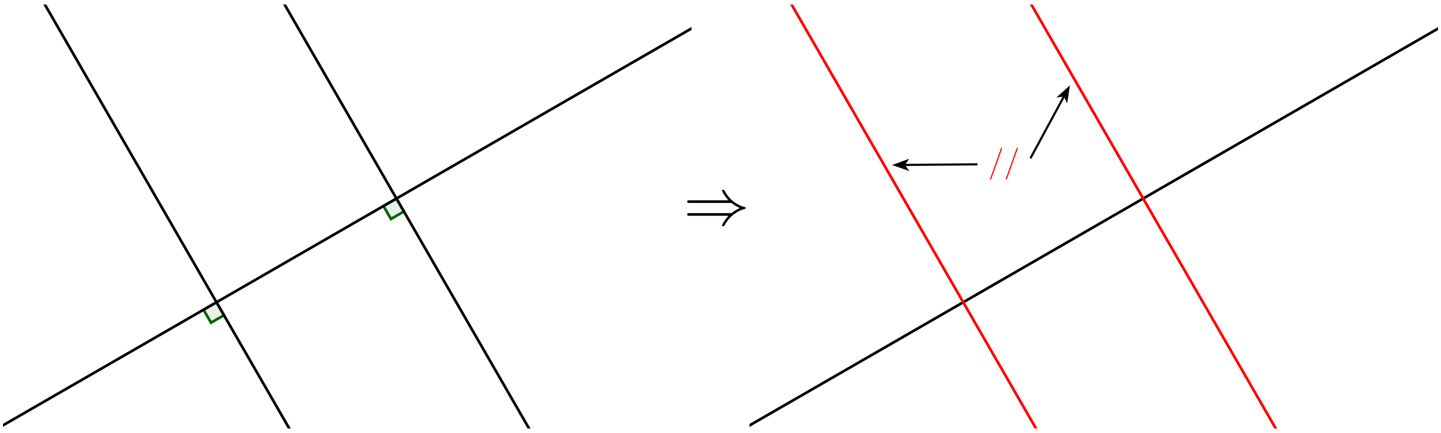
c. Théorèmes

Ce qu'on a observé sur Géogebra avec la droite noire et les deux droites bleues peut être démontré grâce l'axiome précédent. Lorsqu'on a démontré un énoncé, on sait qu'il vrai, quelques soient les droites tracées, si on a bien les deux angles droits alors les droites bleues sont parallèles.

Ces énoncés qui ont été démontrés s'appellent des **théorèmes**.

Théorème

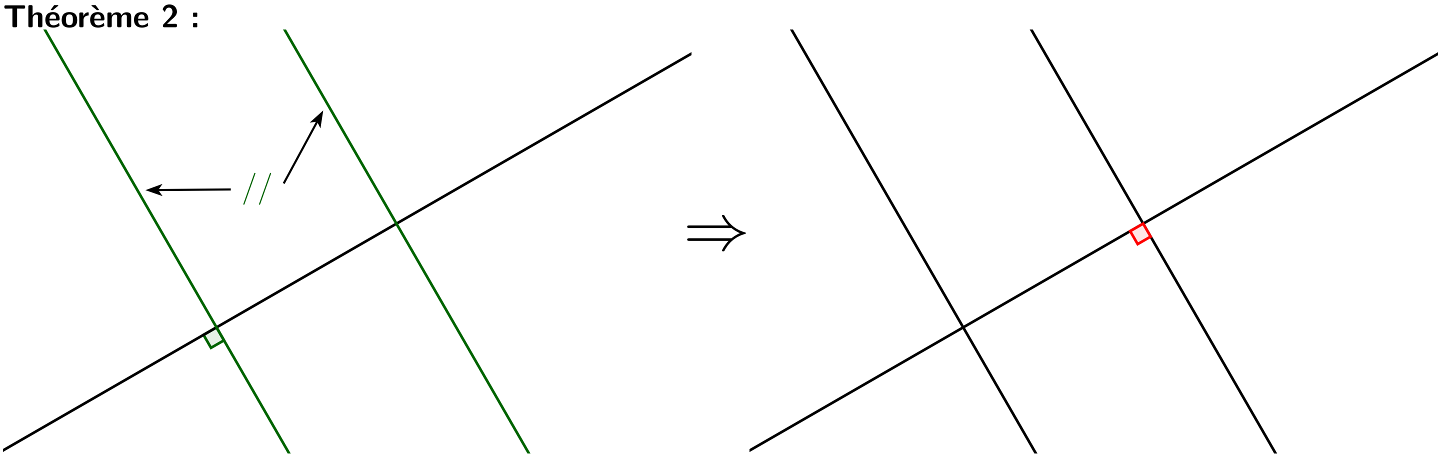
Deux droites perpendiculaires à une troisième droite sont parallèles.



C'est grâce à ce théorème que la méthode « de l'ascenseur » donne bien une droite parallèle.

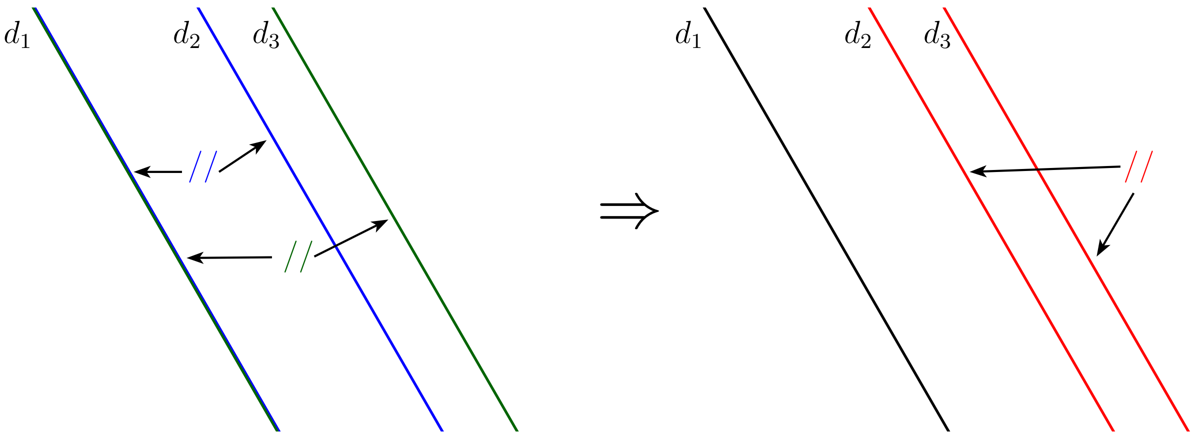
Il existe d'autres théorèmes permettant de déduire des angles droits grâce à du parallélisme.
Trouves un énoncé possible pour les théorèmes illustrés ci-dessous :

Théorème 2 :



Si deux droites sont parallèles et que l'une des deux est perpendiculaire à une troisième droite, alors l'autre est aussi perpendiculaire à cette troisième droite.

Théorème 3 :



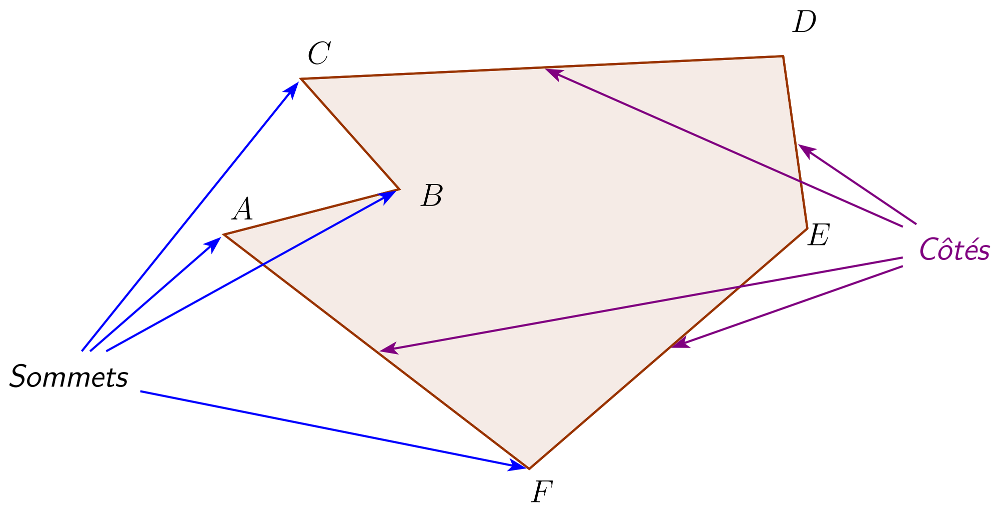
Si deux droites sont parallèles à une troisième droite, alors elles sont parallèles entre elles.
Autre formulation : Si $d_1//d_2$ et $d_1//d_3$ alors $d_2//d_3$.

IV - Polygones

a. Vocabulaire

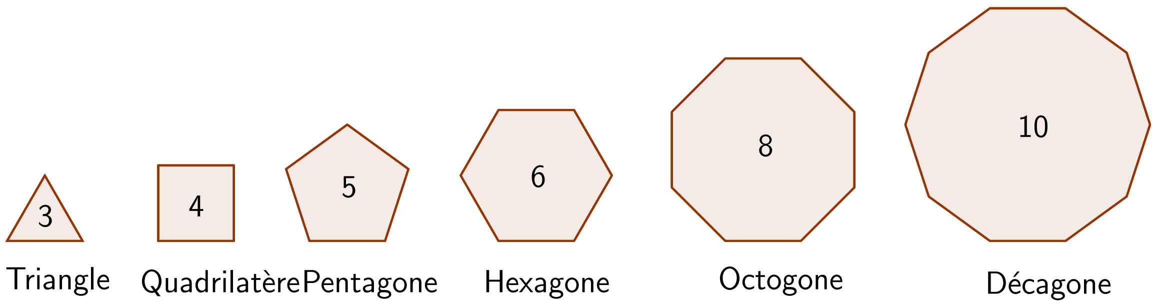
Définition

*Un **polygone** est une figure fermée constituée de segments mis bout à bout.*
*Chaque segment est un **côté** du polygone.*
*Chaque extrémité d'un côté est un **sommet** du polygone.*



*Pour nommer un polygone, on écrit les noms de ses sommets dans l'ordre en **tournant** autour du polygone. On peut commencer par le sommet que l'on veut et tourner dans le sens que l'on veut.*
Par exemple le polygone ci-dessus peut s'appeler $ABCDEF$, mais aussi $FEDCBA$, ou encore $DEFABC$, mais pas $\cancel{CEBADF}$.

Les polygones portent des noms particuliers suivant le nombre de côtés qu'ils ont :

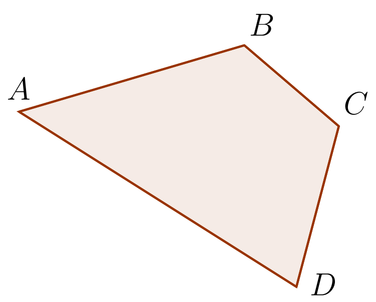


Ceux qui sont dessinés ci-dessus sont des polygones **réguliers** : leurs côtés ont tous la même longueur.

Définition

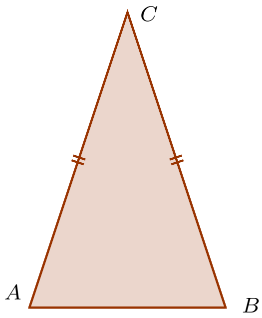
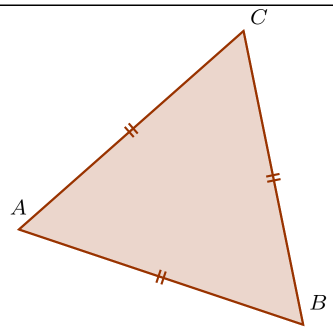
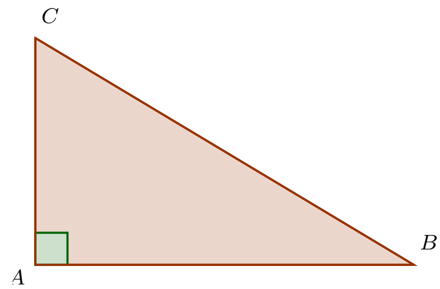
Consécutifs *signifie « qui se suivent ».*

Par exemple 3 et 4 sont deux nombres entiers consécutifs.



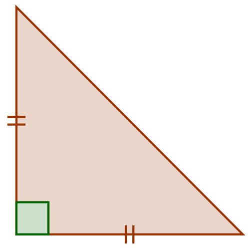
Sur le polygone $ABCD$ ci-contre, les sommets C et D sont consécutifs.
On peut aussi dire que les côtés $[DA]$ et $[AB]$ sont consécutifs.
Dans un quadrilatère, si deux côtés ne sont pas consécutifs, alors ils sont en face l'un de l'autre. On dit qu'il sont **opposés**.
Les côtés $[AB]$ et $[CD]$ sont opposés.

b. Les triangles

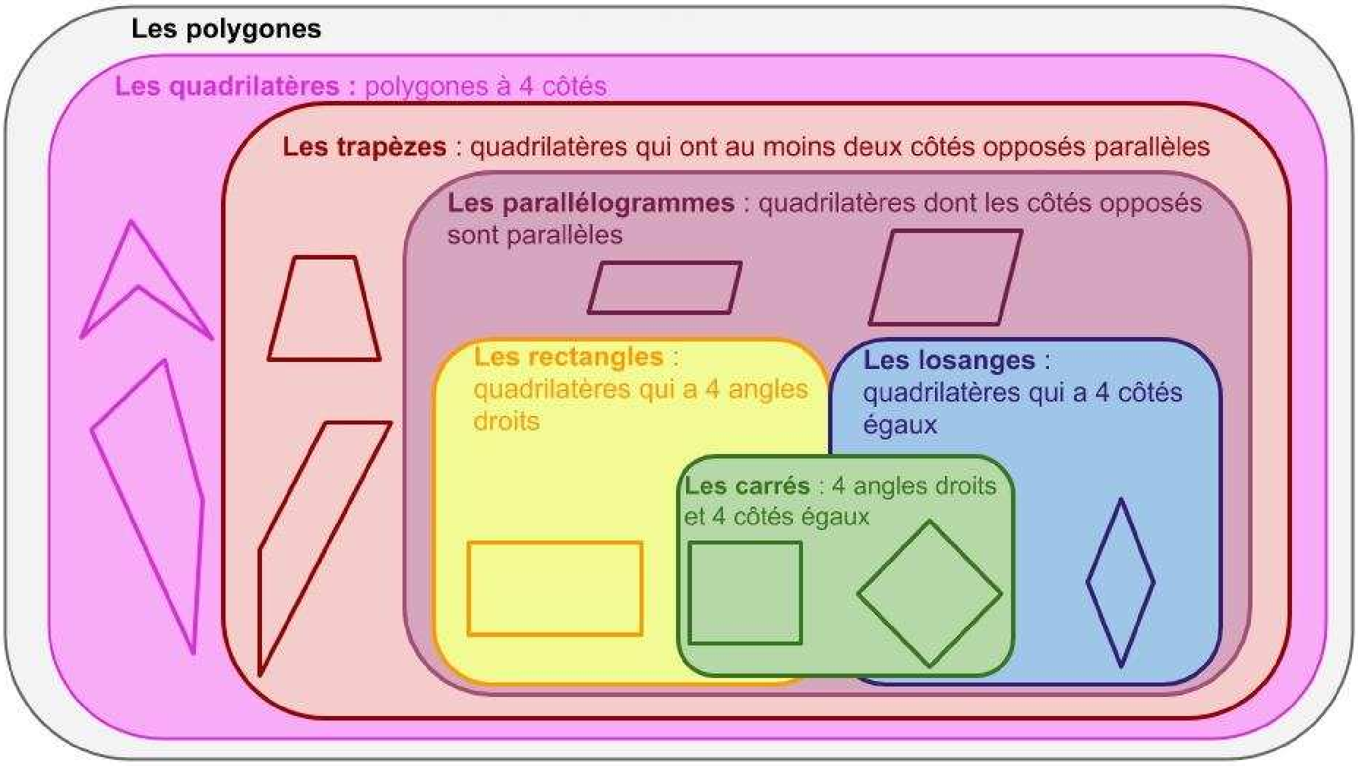
Nom du triangle	**Isocèle**	**Équilatéral**	**Rectangle**
Définition	Un triangle **isocèle** a deux côtés de même longueur.	Un triangle **équilatéral** a tous ses côtés de même longueur.	Un triangle **rectangle** a un angle droit.
Exemple codé			

Un triangle qui n'a rien de particulier s'appelle un triangle **quelconque**.

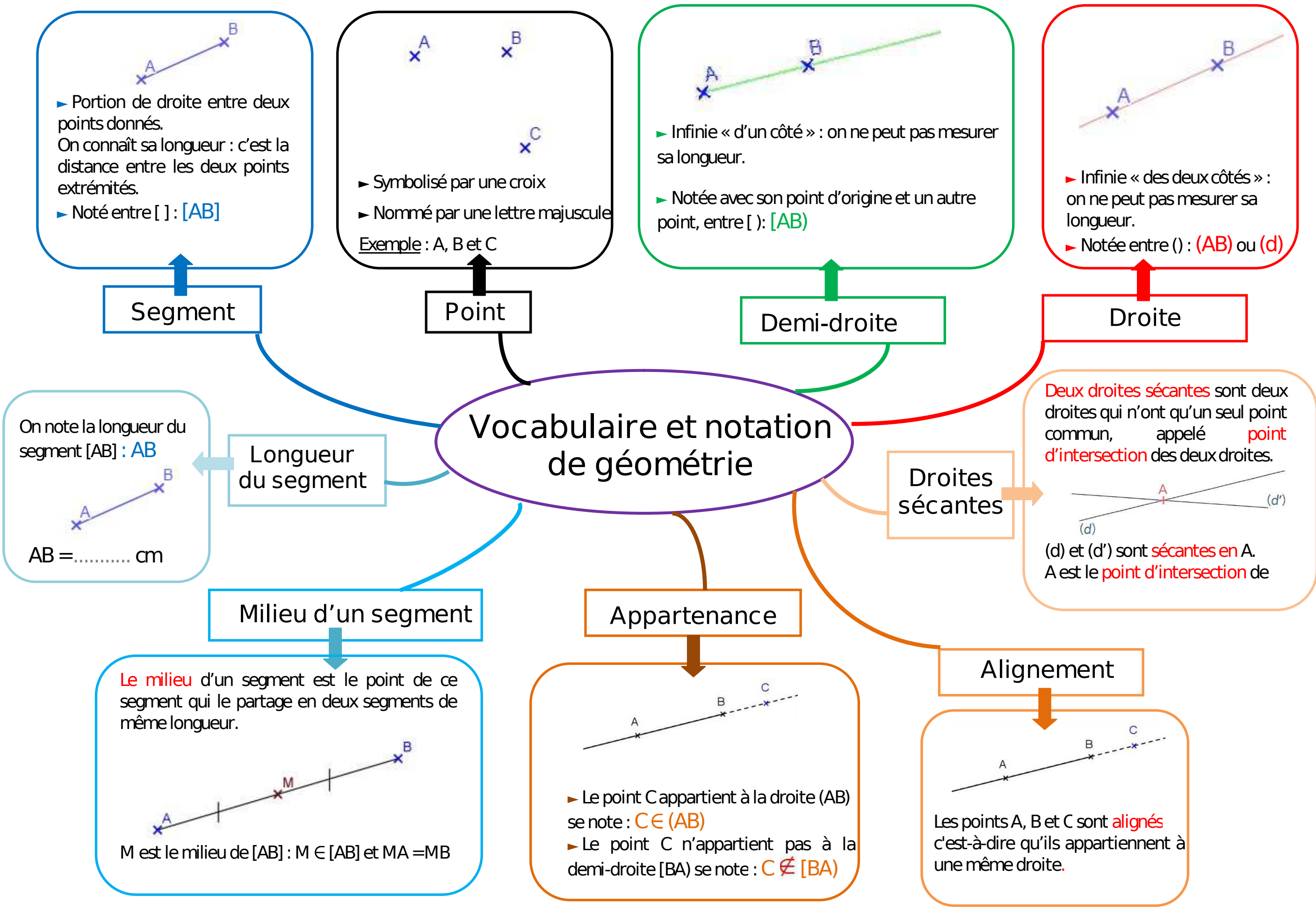
Un triangle peut être à la fois isocèle et rectangle :



c. Les quadrilatères



V - Bilan



Voir les exercices n°13 et 17 page 209