Les fractions

I - Rappels : les fractions qu'on a déjà vues

Quand nous avons parlé de l'écriture décimale, nous avons vu les **fractions décimales**. Un dixième, neuf centièmes ou trois millièmes par exemple sont des fractions décimales.

Un dixième $= \dfrac{1}{10} = 0,1$ | Neuf centièmes $= \dfrac{9}{100} = 0,09$ | Trois millièmes $= \dfrac{3}{1\,000} = 0,003$

La fraction est l'écriture d'**un nombre**, mais on peut écrire ce nombre sous d'autres formes : écriture décimale, décomposition en fractions décimales...

$$\frac{52}{10}$$

Numérateur : 52

Barre de fraction

Dénominateur : 10

Le mot numérateur a la même racine que numération ou nombre : **le numérateur permet de compter combien de parts la fraction représente.**

Le mot dénominateur a la même racine que nom ou nommer : **le dénominateur permet de nommer la fraction**. Par exemple 5 centièmes, 3 dixièmes...

Exercice 1 Complète les égalités.

a) $0,3 = \dfrac{3}{\dots} = \dots$ dixièmes.

b) $3,6 = 3 + \dfrac{\dots}{10} = \dots$ dixièmes.

c) $10,01 = \dfrac{\dots}{100} = \dfrac{\dots}{1\,000}$

d) $\dots\dots\dots = \dfrac{59\,870}{100} = \dfrac{\dots}{10}$

e) 78 millièmes $= \dfrac{78}{\dots\dots} = \dfrac{\dots}{10}$

f) $0,67 = \dfrac{67}{\dots} = \dots$ dixièmes.

Remarque

Quand on a plusieurs fois le même objet, cela correspond à une multiplication. Par exemple 3 stylos, c'est 3×1 stylo. De la même façon, 3 dixièmes, c'est 3 fois 1 dixième.

$$\frac{3}{10} = 3 \times \frac{1}{10} \qquad \frac{98}{100} = 98 \times \frac{1}{100} \qquad 7 \times \frac{1}{1\,000} = \frac{7}{1\,000} = 0,007 \qquad \dots$$

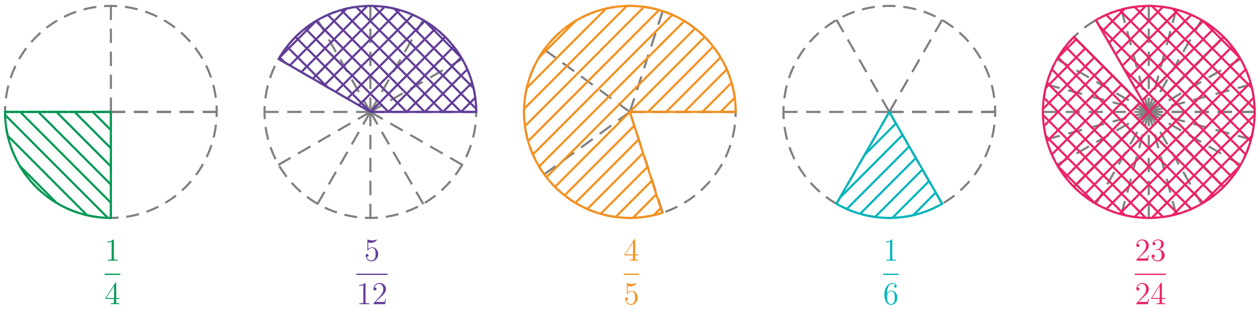
On a donc également :

$$3 \times \frac{2}{100} = \frac{3 \times 2}{100} = \frac{6}{100} = 0,06 \qquad 7 \times \frac{2}{10} = \frac{7 \times 2}{10} = \frac{14}{10} = 1,4 \qquad \dots$$

Exercice n°3 et 4 page 63 (Correction page 275)

II - Représentation et définition des fractions

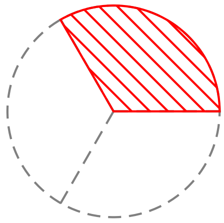
On représente souvent les fractions par des portions de disques : le disque entier correspond à l'unité (la quantité 1), et la fraction correspond à un certain nombre de parts égales. La taille de chaque part correspond au dénominateur, et le nombre de parts colorées correspond au numérateur.



Définition

Le nombre $\frac{1}{3}$ *est le nombre qu'il faut prendre* 3 *fois pour obtenir* 1.

Autrement dit : $3 \times \frac{1}{3} = 1$.



Remarque

On peut voir la fraction $\frac{2}{3}$ *comme deux fois la fraction* $\frac{1}{3}$ *:* $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 2 \times \frac{1}{3}$

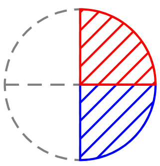
ou comme la quantité qu'il faut prendre 3 fois pour obtenir ***2***.

Exercice 2 Trouver la valeur manquante :

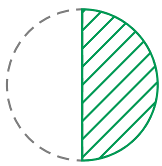
$5 \times \ldots\ldots = 1$ $\qquad$ $5 \times \ldots\ldots = 3$ $\qquad$ $7 \times \ldots\ldots = 6$ $\qquad$ $3 \times \ldots\ldots = 5$

III - Plusieurs fractions pour un même nombre : règle fondamentale des fractions

On peut désigner une même quantité avec des fractions différentes :



$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$

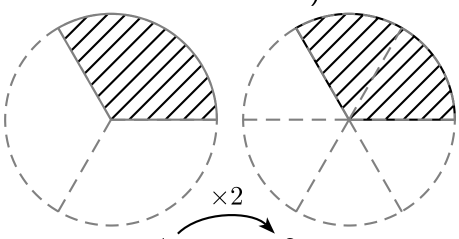


$\frac{1}{2}$

Dans les deux cas, on a hachuré la même surface, c'est donc la même quantité, le même nombre :

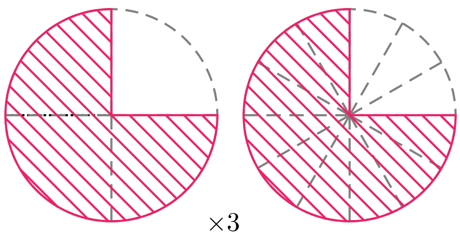
$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Quand on coupe en deux chaque "part", on multiplie par deux le nombre total de parts (donc le dénominateur).



$$\frac{1}{3} \underset{\times 2}{\overset{\times 2}{=}} \frac{2}{6}$$

De même quand on les coupe en 3 :



$$\frac{3}{4} \underset{\times 3}{\overset{\times 3}{=}} \frac{9}{12}$$

Ainsi, quand on multiplie le dénominateur et le numérateur par le même nombre, on ne change pas la valeur de la fraction :

$$\frac{5}{3} = \frac{5\times2}{3\times2} = \frac{10}{6} = \frac{5\times3}{3\times3} = \frac{15}{9} \quad \text{et réciproquement} \quad \frac{15}{9} = \frac{5\times3}{3\times3} = \frac{10}{6} = \frac{5\times2}{3\times2} = \frac{5}{3}$$

$\div 2$

$\div 2$

À retenir (*Règle fondamentale des fractions*)

*On ne change pas la valeur d'une fraction en multipliant (ou divisant) son numérateur **et** son dénominateur par un **même nombre**.*

Exercice n°23 page 65 et n°26 page 65 (Correction page 275)

Cette propriété permet de simplifier les fractions :

- $\frac{120}{144} = \frac{60 \times 2}{72 \times 2} = \frac{60}{72} = \frac{15 \times 4}{18 \times 4} = \frac{15}{18} = \frac{3 \times 5}{3 \times 6} = \frac{5}{6}$
- $\frac{472}{358} = \frac{236 \times 2}{179 \times 2} = \frac{236}{179}$

Remarque

*Une fraction s'écrit avec des nombres entiers au numérateur et au dénominateur. Si on divise le numérateur et le dénominateur par un même nombre mais qu'on trouve des valeurs décimales, ce n'est plus une fraction, mais une **écriture fractionnaire**. Or, quand on vous demande de simplifier une fraction, il faut que la réponse soit une fraction.*

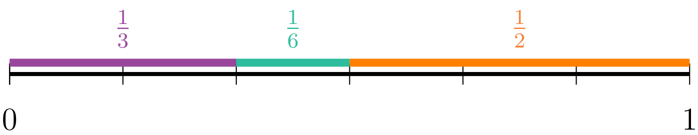
Exemple

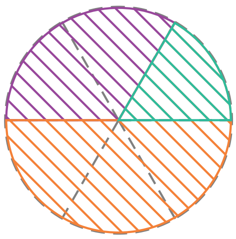
$\frac{3}{12} = \frac{1}{4} = \frac{0,5}{2}$ *mais on laisse* $\frac{1}{4}$ *comme résultat final car* $\frac{0,5}{2}$ *n'est pas une fraction.*

IV - Fractions et axes gradués

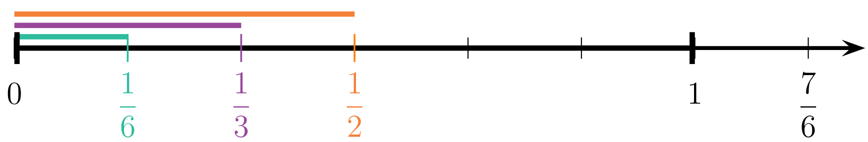
Comme tous les autres nombres, les fractions peuvent se placer sur la droite graduée.

Le segment unité (un segment de longueur 1) a le même rôle que le cercle entier : il va être coupé en morceaux afin d'en prendre une fraction :
Les **fractions** sont alors représentées par des segments dont elles sont la **longueur**.





L'abscisse d'un point est la distance entre ce point et l'origine de l'axe (graduation zéro), donc on va placer les abscisses fractionnaires ainsi :



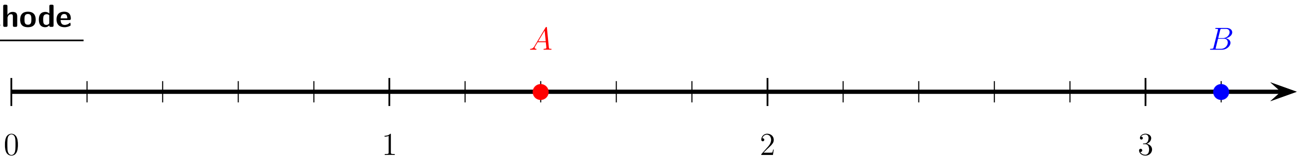
Remarque

On peut remarquer que $\frac{6}{3}$ *se place au même endroit que* 2*. Cela montre que* $\frac{6}{3} = 2$.

> *Si deux fractions différentes sont toutes les deux l'abscisse d'un même point, cela signifie que ces fractions sont égales.*

Par exemple $\frac{7}{3} = \frac{14}{6}$.

Méthode



- *On repère l'origine (là où est le zéro) et l'unité (là où est le 1) de l'axe.*
- *On compte le nombre de segments entre les graduations entre les deux (ici il y en a 5).*
- *La quantité qui est 5 fois entre 0 et 1, c'est un cinquième* $\left(\frac{1}{5}\right)$.
- *On peut ainsi compter le nombre de cinquièmes pour placer n'importe quelle abscisse qui a un 5 au dénominateur (en bas de la fraction).*

  Par exemple le point A placé sur l'axe ci-dessus est à 7 cinquièmes de l'origine, son abscisse est donc $A\left(\frac{7}{5}\right)$.
- *Pour aller plus vite et ne pas se tromper en comptant sur de grandes quantités, on peut ne compter qu'à partir d'une graduation déjà marquée :*

  Par exemple pour trouver l'abscisse du point B, je pars de 3, qui correspond à 15 cinquièmes, et je compte à partir de là c'est donc 16 cinquièmes : $B\left(\frac{16}{5}\right)$.

Exercice n°8 page 63 (Correction page 275)

V - Pour aller plus loin

Mais pourquoi s'embêter avec des fractions alors qu'on pourrait utiliser les écritures décimales des nombre ?

Par exemple $\frac{1}{3}$. Pour trouver son écriture décimale, on peut poser la division décimale $1 \div 3$.

$$\begin{array}{r|l} 1 & 3 \\ \cline{2-2} -0 & 0{,}3\ 3\ 3 \\ \hline 1\ 0 & \\ -9 & \\ \hline 1\ 0 & \\ -9 & \\ \hline 1\ 0 & \\ -9 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

Or, si on pose la division, on se rend compte qu'on aura toujours le même reste (1), on déscend un 0, donc on ajoute un 3 et il reste à nouveau 1, etc.

La fraction $\frac{1}{3}$ vaut donc $0,333333...$ avec une infinité de 3 derrière la virgule.
On ne peut pas écrire une infinité de chiffres après la virgule ! On ne peux donc pas écrire un tiers sous forme décimale.

Les fractions permettent d'écrire des nombres qu'on ne pouvait pas écrire de manière exacte avant. Par exemple $\frac{1}{3} \approx 0,3333333333333333...$, ce n'est qu'un arrondi de la valeur exacte de un tiers.

Exercice 3 Dans le tableau ci-dessous, range les fractions suivantes : $\frac{1}{11}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{78}{113}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{8}{5}$; $\frac{1}{2}$.

Fractions qui ont une écriture décimale	Fractions qui n'ont pas d'écriture décimale

Remarque

La calculatrice ne peut afficher qu'un certain nombre de décimales. Elle fait donc des ***arrondis****.*

Par exemple $\frac{78}{113} \times 113 = 78$ *(définition de la fraction), mais en faisant* $0,6902654867 \times 113$ *à la calculatrice, on ne trouve pas 78 mais* $77,9999999971$ *; ce qui montre bien que le résultat décimal affiché n'était pas vraiment égal à la fraction* $\frac{78}{113}$.

Correction des exercices

Exercice 1

a) $0,3 = \frac{3}{10} = 3$ dixièmes.

b) $3,6 = 3 + \frac{6}{10} = 36$ dixièmes.

c) $10,01 = \frac{1\,001}{100} = \frac{10\,010}{1\,000}$

d) $598,7 = \frac{59\,870}{100} = \frac{5\,987}{10}$

e) 78 millièmes $= \frac{78}{1\,000} = \frac{0,78}{10}$

f) $0,67 = \frac{67}{100} = 6,7$ dixièmes.

Exercice 2

$5 \times \frac{1}{5} = 1$ $5 \times \frac{3}{5} = 3$ $7 \times \frac{6}{7} = 6$ $3 \times \frac{5}{3} = 5$

Exercice 3

Fractions qui ont une écriture décimale	Fractions qui n'ont pas d'écriture décimale
$\frac{1}{2} = 0,5$; $\frac{1}{5} = 0,2$ $\frac{1}{8} = 0,125$ $\frac{3}{8} = 0,375$; $\frac{8}{5} = 1,6$	$\frac{2}{3} \approx 0,6666666667$ $\frac{1}{11} \approx 0,090909090909$ $\frac{78}{113} \approx 0,6902654867$