Multiplications - Calculs en ligne

I - Vocabulaire

Définition

*Le résultat de la multiplication est le **produit**. Les nombres que l'on multiplie sont les **facteurs**.*

$$8 \times 7 = 56$$

produit *facteurs* *résultat*

*Dans un produit, les nombres qu'on multiplie sont appelés les **facteurs**.*

Remarque

*On dit que 9×6 est le produit de 9 **par** 6.*

Définition

*Le résultat de la division est le **quotient**.*

$$18 \div 9 = 2$$

quotient *dividende* *diviseur* *résultat*

Exemples

a) *Les trois **termes** de la **somme** « $6 + 12 + 1$ » sont 6 et 12 et 1.*

b) *Dans le **produit** $6 \times 5 \times 2 \times 3$, il y a quatre **facteurs** : 6, 5, 2 et 3.*

c) *Le quotient de 56 par 8 est 7 car $8 \times 7 = 56$.*

II - C'est quoi une multiplication ?

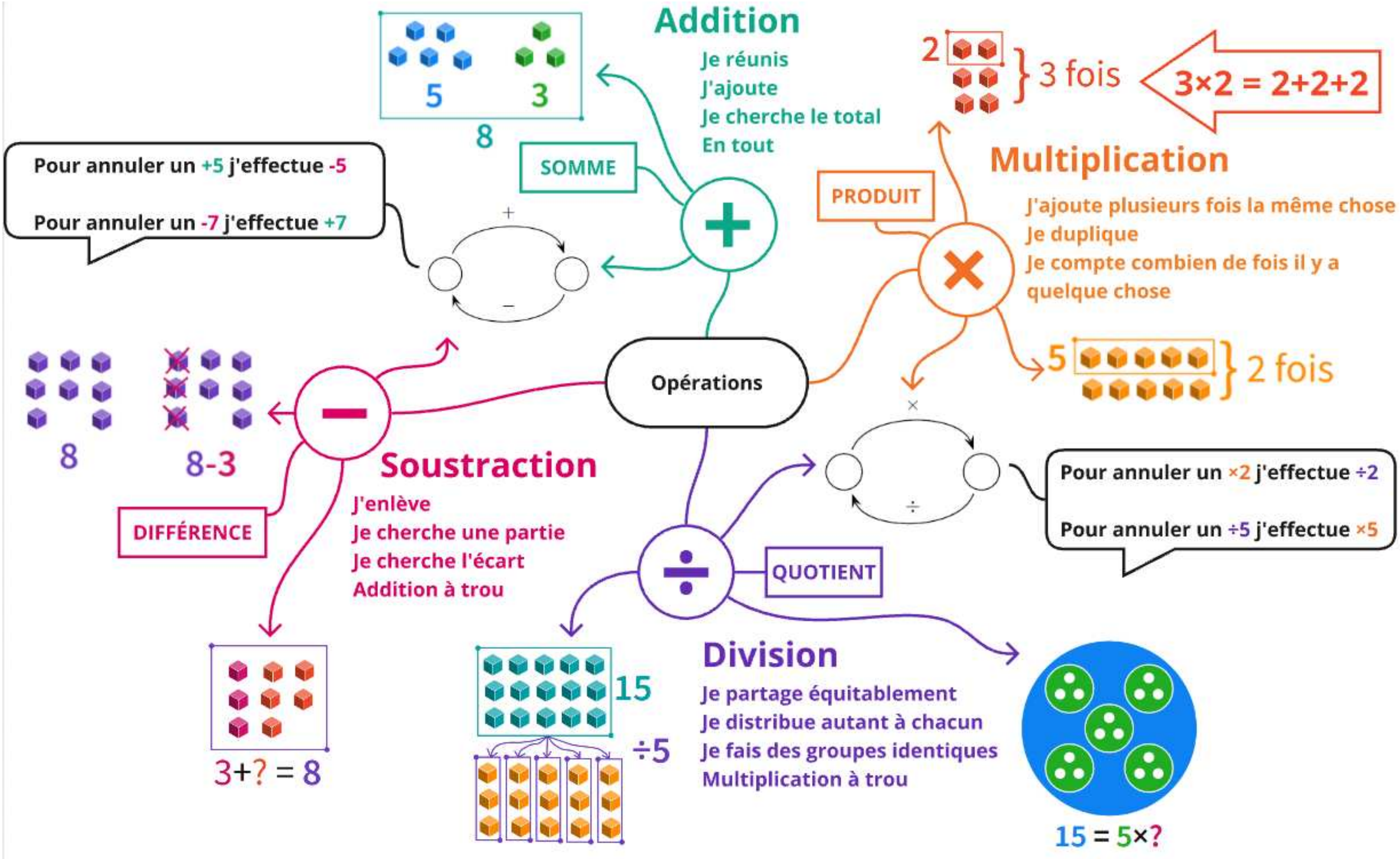
a. Addition répétée

Il arrive fréquemment qu'on doive répéter une addition. Par exemple : $3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$

Si le nombre de répétitions est grand, ça peut vite devenir long à écrire, c'est pourquoi les mathématiciens ont inventé une notation plus courte :

$$5 \times 3 = 15$$

La multiplication est une **addition répétée**.

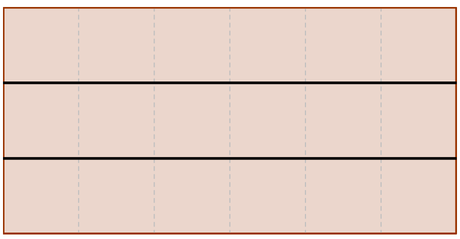


Exemples (Problèmes multiplicatifs)

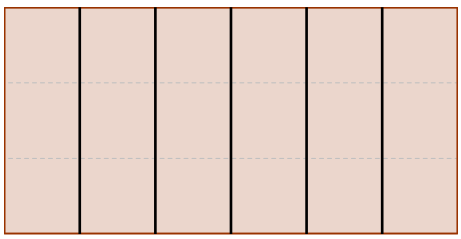
- « *Si tu as 3 boîtes et que chaque boîte contient 6 bonbons, combien as-tu de bonbons en tout ?* »
  $3 \times 6 = 12$ *bonbons*
- « *Il y a 4 rangées de 5 chaises dans la salle. Combien y a-t-il de chaises ?* »
  $4 \times 5 = 20$ *chaises*

b. L'aire d'un rectangle

La multiplication permet également de calculer l'aire d'un rectangle. Par exemple un rectangle de longueur 6 et de largeur 3 contient :



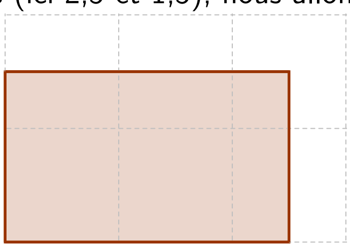
3 lignes de 6 carreaux, ce qui fait $3 \times 6 = 18$ carreaux



6 colonnes de 3 carreaux, ce qui fait $6 \times 3 = 18$ carreaux

Le produit est commutatif (on peut échanger les facteurs, le résultat reste le même) donc dans les deux cas, l'aire est le résultat du produit de la longueur par la largeur.

En prenant des longueurs décimales (ici 2,5 et 1,5), nous allons pouvoir multiplier des nombres décimaux :

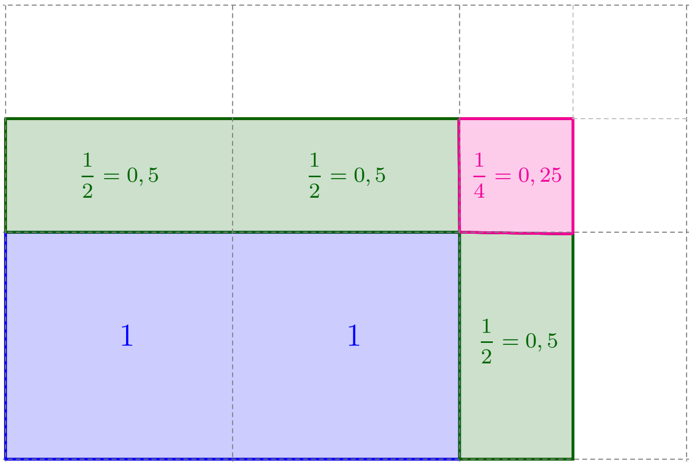


Comptons les morceaux de carreaux :
$1 + 1 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,25 = 3,75$
On en déduit que 3,75 est le produit de 2,5 par 1,5 :

$$2,5 \times 1,5 = 3,75$$

Essayons de poser la multiplication comme s'il n'y avait pas de virgules dans les facteurs :

$$\begin{array}{r} 2\ 5 \\ \times\quad 1\ 5 \\ \hline 1\ 2\ 5 \\ 2\ 5\ \cdot \\ \hline 3\ 7\ 5 \end{array}$$



On obtient les mêmes chiffres, il faut simplement les positionner correctement dans le tableau de numération (unités, dixièmes, centièmes, millièmes...) pour avoir le bon résultat.

III - Multiplications et divisions par 10, 100, 1 000 ; etc.

Lorsqu'on écrit un nombre sous forme décimale, il est automatiquement placé dans ce tableau :

Partie entière									Partie décimale					
Millions			Milliers			Unités			dixièmes	centièmes	millièmes	dix-millièmes	cent-millièmes	millionièmes
centaines	dizaines	unités	centaines	dizaines	unités	centaines	dizaines	unités						
								,						

Dans ce tableau, lorsqu'on passe d'une colonne à la colonne juste à gauche, la quantité est multipliée par 10. Par exemple $53,61 \times 10 = 53,61$ dizaines $= 536,1$. Le chiffre des unités glisse vers la colonne des dizaines, chaque chiffre du nombre glisse dans la colonne précédente.

De la même manière, quand on fait glisser les chiffres d'une colonne du tableau vers la colonne à la droite, on multiplie par un dixième. Par exemple $12\,345,678\,9 \times 0,1 = 1\,234,567\,89$

À retenir

En décalant les chiffres d'un nombre dans le tableau de numération :

- *vers la gauche, on multiplie le nombre par 10*
- *vers la droite, on multiplie le nombre par 0,1*

Exemples

a) $7 \times 100 = 7$ *centaines* $= 700$

b) $56 \times 10 = 56$ *dizaines* $= 560$

c) $578 \times 1\,000 = 578\,000$

d) $7,1 \times 10 = 71$

e) $56,2 \times 100 = 5\,620$

f) $0,98 \times 1\,000 = 980$

g) $578 \times 0,001 = 0,578$

h) $0,98 \times 0,000\,1 = 0,000\,098$

IV - Multiplication posée (nombres décimaux)

Effectuer l'opération $6 \times 0,2$ revient à faire 6×2 dixièmes, ce qui fait 12 dixièmes, soit $1,2$.
On peut aussi le voir ainsi : $6 \times 0,2 = 0,2 + 0,2 + 0,2 + 0,2 + 0,2 + 0,2 = 1,2$

Exemples

$3 \times 0,07 = 0,21$ $\qquad$ $70 \times 0,001 = 0,070$ $\qquad$ $2 \times 32,1 = 64,2$ $\qquad$ $5,1 \times 12,48 = ??$

Pour pouvoir effectuer $5,1 \times 12,48$, je vais d'abord la modifier un peu :

$$5,1{\color{red}\times 10} \times 12,48{\color{blue}\times 100} = 51 \times 1\,248$$

Opération que je peux poser :

$$\begin{array}{rr} & 5\ 1 \\ \times & 1\ 2\ 4\ 8 \\ \hline & 4\ 0\ 8 \\ & 2\ 0\ 4\ \cdot \\ & 1\ 0\ 2\ \cdot\ \cdot \\ & 5\ 1\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \hline & 6\ 3\ 6\ 4\ 8 \end{array}$$

Mais le résultat que je trouve ne correspond pas au calcul de départ : pour annuler ma modification, je dois diviser par 10, puis diviser par 100.
Je trouve donc : $5,1 \times 12,48 = 63,648$

Plus généralement :

$$\begin{array}{rr} & 2\ 4{,}5 \\ \times & 2{,}7\ 3 \\ \hline & 7\ 3\ 5 \\ & 1\ 7\ 1\ 5\ \cdot \\ & 4\ 9\ 0\ \cdot\ \cdot \\ \hline & 6\ 6{,}8\ 8\ 5 \end{array}$$

Méthode pour multiplier deux nombres décimaux :

1. On effectue la multiplication comme si les nombres n'avaient pas de virgule.
2. On compte le nombre de chiffres dans les parties décimales des deux facteurs.
3. On place la virgule dans le résultat de manière à ce qu'il y ait ce nombre de chiffres après la virgule.

Exemples

$$\begin{array}{rr} & 1\ 0\ 4{,}5\ 6 \\ \times & 3 \\ \hline & 3\ 1\ 3{,}6\ 8 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 8\ 7{,}2\ 1\ 4 \\ \times & 2{,}1 \\ \hline & 8\ 7\ 2\ 1\ 4 \\ & 1\ 7\ 4\ 4\ 2\ 8\ \cdot \\ \hline & 1\ 8\ 3{,}1\ 4\ 9\ 4 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 5\ 1 \\ \times & 2{,}3 \\ \hline & 1\ 5\ 3 \\ & 1\ 0\ 2\ \cdot \\ \hline & 1\ 1\ 7{,}3 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 0{,}0\ 1\ 2\ 3 \\ \times & 0{,}0\ 4 \\ \hline & 0\ 0\ 4\ 9\ 2 \\ \hline & 0{,}0\ 0\ 0\ 4\ 9\ 2 \end{array}$$

V - Le signe égal

Définition

Le signe égal, noté $=$, signifie qu'on peut remplacer l'expression à gauche du $=$ par l'expression à droite du signe égal : elles ont la même valeur.

$$\underbrace{5 \times 3}_{\text{membre de gauche}} \quad = \quad \underbrace{11 + 4}_{\text{membre de droite}}$$

Exemple

Quand on simplifie une fraction, on peut remplacer le numérateur par un produit qui lui est égal :

$$\frac{72}{9} = \frac{8 \times 9}{9} = 8$$

Je peux remplacer « 72 » par « 8×9 » dans la fraction car $72 = 8 \times 9$.

VI - Enchaînement d'opérations

En mathématiques, on est souvent amenés à faire plusieurs calculs à la suite. Il faut alors faire bien attention que les égalités qu'on écrit sont justes.

Par exemple : `Choisir un nombre, lui ajouter cinq et multiplier le résultat par deux.`

Quel est le résultat de ce programme de calcul si on choisit le nombre 1 au départ ?

- $1 + 5 = 6$
- $6 \times 2 = 12$

On aurait envie d'écrire directement : $1+5 = 6\times 2 = 12$...
Ces égalités sont-elles vraies ?

$$\underbrace{1+5}_{6} = \underbrace{6 \times 2}_{12}$$

C'est faux !

> Dans une suite de calculs en ligne, il faut toujours vérifier que tous les membres des égalités sont bien égaux !

Pour éviter cette erreur, on peut remplacer les égalités par un diagramme dans lequel les opérations s'enchaînent :

$$1 \xrightarrow{+5} \cdots \xrightarrow{\times 2} \cdots$$

On peut quand même écrire le calcul, mais en écrivant les deux opérations dès le début, à l'aide de parenthèses :

$$(1+5) \times 2 = 6 \times 2 = 12$$

> On écrit entre parenthèses l'opération qu'il faut effectuer en premier.

VII - Priorités opératoires

Dans l'expression « $7+2\times 3$ », il n'y a pas de parenthèses, donc on peut effectuer le calcul de deux manières différentes :

$$\begin{aligned}(7+2) \times 3 &= 9 \times 3 \\ &= 27\end{aligned} \qquad \begin{aligned}7 + (2 \times 3) &= 7 + 6 \\ &= 13\end{aligned}$$

Il faut qu'une expression n'ait qu'un résultat, sinon $27 = 13$ et on ne peut plus rien faire ! Donc les mathématiciens ont eu deux choix, soit obliger à toujours écrire **toutes** les parenthèses, ce qui donnerait des expressions comme « $(((5+(3\times 2))-10)+(4-(7-1))) \div 10)$ », soit créer une règle pour alléger l'écriture.

Règle des priorités opératoires

1. Les calculs dans des parenthèses sont prioritaires.
2. Les carrés sont prioritaires sur toutes les opérations.
3. **Les multiplications et les divisions sont prioritaires** sur les additions et les soustractions.
4. Dans les autres cas, les calculs s'effectuent de gauche à droite.

Avec cette règle, il n'y a plus d'ambiguïté dans l'expression « $7 + 2 \times 3$ » : on doit commencer par la multiplication, le résultat est donc 13.

Exemples

a) *Effectuer le calcul :*

$$\begin{aligned}(5+2)\times 6+3 &= 7\times 6+3 && \textit{On effectue d'abord le calcul dans la parenthèse}\\ &= 42+3 && \textit{ensuite on effectue la multiplication (prioritaire)}\\ &= 45 && \textit{enfin on peut effectuer l'addition}\end{aligned}$$

b) *Effectuer le calcul :*

$$\begin{aligned}13-2\times 6+3 &= 13-12+3 && \textit{On effectue la multiplication (prioritaire)}\\ &= 1+3 && \textit{ensuite on effectue les calculs de gauche à droite}\\ &= 4\end{aligned}$$

c) *Effectuer le calcul :*

$$\begin{aligned}14-2\times(6-3) &= 14-2\times 3 && \textit{On effectue d'abord le calcul dans la parenthèse}\\ &= 14-3 && \textit{ensuite on effectue la multiplication (prioritaire)}\\ &= 11 && \textit{enfin on peut effectuer la soustraction}\end{aligned}$$

Remarque

Dans une écriture fractionnaire, la barre de fraction est la **dernière opération** *à effectuer. Cela signifie qu'il y a des parenthèses « invisibles » autour du numérateur et autour du dénominateur.*

Par exemple $\dfrac{14+7}{7} = \dfrac{(14+7)}{7} = \dfrac{21}{7} = 3$ *et* $3+\dfrac{8-2}{8+4} = 3+\dfrac{6}{12} = 3+\dfrac{1}{2} = 3,5$

VIII - Nommer un calcul

Un calcul porte le nom de la <u>dernière</u> opération effectuée.

Exemples

- $5 + 3 \times 2$ *est la somme de* 5 *et de* 3×2, *en effet, on effectue d'abord la multiplication (qui est prioritaire) donc la dernière opération effectuée est l'addition.*
- $(5 + 3) \times 2$ *est le produit de* $(5 + 3)$ *par* 2.

  On peut aussi dire : « C'est le produit de la somme de 5 et de 3 par 2 ».
- $5 + 6 - 3$ *est la différence entre* $5 + 6$ *et* 3, *donc :*

  « $5 + 6 - 3$ *est la différence entre la somme de 5 et de 6 et 3* ».
- $(6 + 3) \div 2$ *est le quotient de* $(6 + 3)$ *par* 2, *c'est à dire :*

  « $(6 + 3) \div 2$ *est le quotient de la somme de 6 et de 3 par* 2 ».

IX - Propriétés de la multiplication

Propriétés

- $5 \times 3 = 3 \times 5$, *la multiplication est commutative (on peut échanger l'ordre des facteurs)*
- $5 \times 78,4 \times 2 = 5 \times 2 \times 78,4$, *la multiplication est associative (on peut regrouper les facteurs)*
- $72 \times (10 + 1) = 72 \times 10 + 72 \times 1$, *la multiplication se distribue sur l'addition (et la soustraction).*

Développer : *Transformer un produit* $(\times)$ *en somme* $(+)$.

Développer

$$\bigstar \times (\spadesuit + \clubsuit) = \underline{\bigstar \times \spadesuit} + \underline{\bigstar \times \clubsuit}$$

Factoriser

Factoriser : *Transformer une somme* $(+)$ *en produit* $(\times)$.