# Les fractions

## I - Comprendre la notion de fraction

**Lorsqu'on partage quelque chose, chaque morceau correspond à une fraction de l'objet total.**

Par exemple prenons une baguette de pain qui a été coupée en parts **égales**.

On sait quelle est la fraction obtenue en répétant le morceau jusqu'à compléter l'objet entier :

- Il y a deux demi-baguettes dans une baguette
- Il y a trois tiers de baguettes dans une baguette
- Il y a quatre quarts de baguettes dans une baguette...


En mathématiques, on étudie les fractions de l'unité pour représenter des nombres. On ne prend donc plus une fraction **de baguette**, mais une fraction tout court.

Cela veut dire que ce qui a été coupé en morceaux égaux **c'est le nombre 1**.

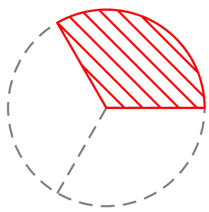
**Définition**

**Un tiers**, *c'est l'un des morceaux qu'on obtient quand on partage quelque chose en trois parties égales.*

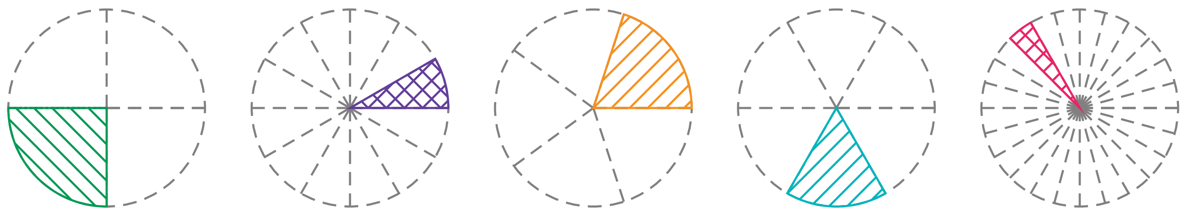
*C'est le résultat du partage d'une chose en trois, donc ça s'écrit un sur trois :* $\frac{1}{3}$

*Le nombre* $\frac{1}{3}$ *est le nombre qu'il faut prendre* $3$ *fois pour obtenir* $1$.

*Autrement dit :* $3 \times \frac{1}{3} = 1$.



On peut aussi définir d'autres fractions en découpant l'unité (ce qui représente 1) en parts **égales** :



**Remarque**

*On peut voir la fraction* $\frac{2}{3}$ *comme deux fois la fraction* $\frac{1}{3}$ *:* $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 2 \times \frac{1}{3}$

*ou comme la quantité qu'il faut prendre 3 fois pour obtenir* **2**.

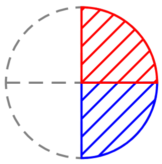
**Exercice** Trouve la valeur manquante :

$5 \times \ldots\ldots = 1$ $5 \times \ldots\ldots = 3$ $7 \times \ldots\ldots = 6$ $3 \times \ldots\ldots = 5$

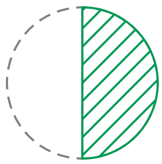
*Correction en fin de document*

# II - Plusieurs fractions pour un même nombre : règle fondamentale des fractions

On peut désigner une même quantité avec des fractions différentes :



$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$$

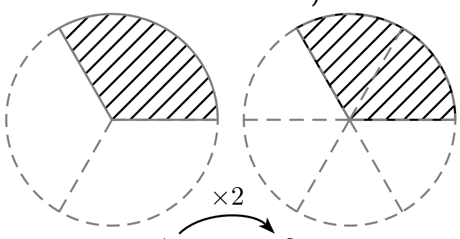


$$\frac{1}{2}$$

Dans les deux cas, on a hachuré la même surface, c'est donc la même quantité, le même nombre :

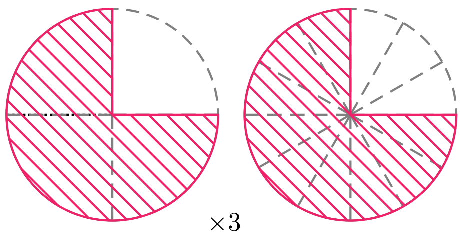
$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Quand on coupe en deux chaque "part", on multiplie par deux le nombre total de parts (donc le dénominateur).



$$\frac{1}{3} \underset{\times 2}{\overset{\times 2}{=}} \frac{2}{6}$$

De même quand on les coupe en 3 :



$$\frac{3}{4} \underset{\times 3}{\overset{\times 3}{=}} \frac{9}{12}$$

Ainsi, quand on multiplie le dénominateur et le numérateur par le même nombre, on ne change pas la valeur de la fraction :

$$\frac{5}{3} = \frac{5\times 2}{3\times 2} = \frac{10}{6} = \frac{5\times 3}{3\times 3} = \frac{15}{9} \quad \text{et réciproquement} \quad \frac{15}{9} = \frac{5\times 3}{3\times 3} = \frac{10}{6} = \frac{5\times 2}{3\times 2} \underset{\div 2}{\overset{\div 2}{=}} \frac{5}{3}$$

**À retenir (Règle fondamentale des fractions)**

*On ne change pas la valeur d'une fraction en multipliant (ou divisant) son numérateur* **et** *son dénominateur par un* **même nombre**.

*Exercices n°47 page 52 et n°48 page 52*

Cette propriété permet de simplifier les fractions :

- $\frac{120}{144} = \frac{60 \times 2}{72 \times 2} = \frac{60}{72} = \frac{15 \times 4}{18 \times 4} = \frac{15}{18} = \frac{3 \times 5}{3 \times 6} = \frac{5}{6}$
- $\frac{472}{358} = \frac{236 \times 2}{179 \times 2} = \frac{236}{179}$

**Remarque**

*Une fraction s'écrit avec des nombres entiers au numérateur et au dénominateur. Si on divise le numérateur et le dénominateur par un même nombre mais qu'on trouve des valeurs décimales, ce n'est plus une fraction, mais une* **écriture fractionnaire**. *Or, quand on vous demande de simplifier une fraction, il faut que la réponse soit une fraction.*

**Exemple**

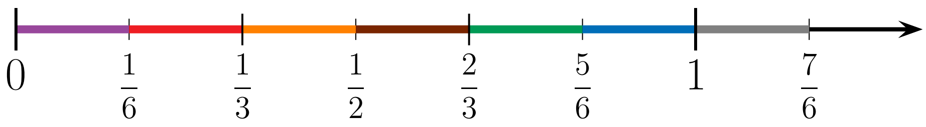
$\frac{3}{12} = \frac{1}{4} = \frac{0,5}{2}$ *mais on laisse* $\frac{1}{4}$ *comme résultat final car* $\frac{0,5}{2}$ *n'est pas une fraction.*

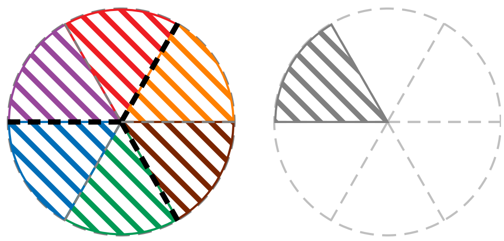
# III - Fractions et axes gradués

Comme tous les autres nombres, les fractions peuvent se placer sur la droite graduée.

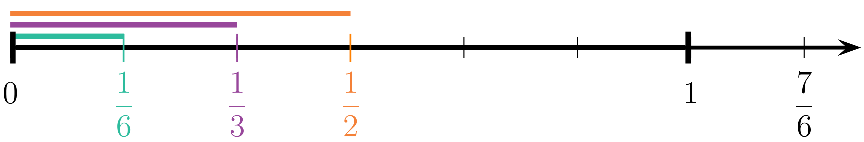
Le segment unité (un segment de longueur 1) a le même rôle que le cercle entier : il va être coupé en morceaux afin d'en prendre une fraction :

Sur un axe gradué, le **segment unité** (segment de longueur 1) correspond au disque unité entier (qui représente aussi le nombre 1).



L'abscisse d'un point est la distance entre ce point et l'origine de l'axe (graduation zéro), donc on va placer les abscisses fractionnaires ainsi :



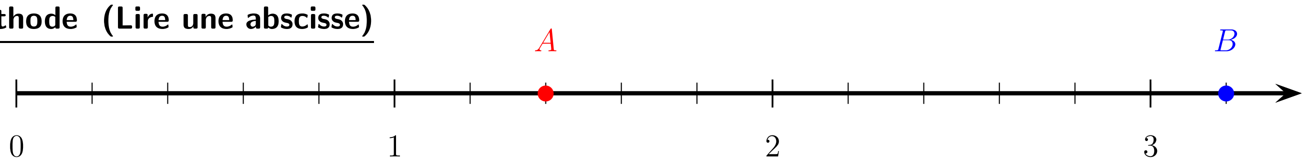

**Remarque**

*On peut remarquer que* $\frac{6}{3}$ *se place au même endroit que* $2$. *Cela montre que* $\frac{6}{3} = 2$.

*Si deux fractions différentes sont toutes les deux l'abscisse d'un même point, cela signifie que ces fractions sont égales.*

*Par exemple* $\frac{7}{3} = \frac{14}{6}$.

**Méthode (Lire une abscisse)**




- *On repère l'origine (là où est le zéro) et l'unité (là où est le 1) de l'axe.*
- *On compte le nombre de segments entre les graduations entre les deux (ici il y en a 5).*
- *La quantité qui est 5 fois entre 0 et 1, c'est un cinquième* $\left(\frac{1}{5}\right)$.
- *On peut ainsi compter le nombre de cinquièmes pour placer n'importe quelle abscisse qui a un 5 au dénominateur (en bas de la fraction).*

  *Par exemple le point A placé sur l'axe ci-dessus est à 7 cinquièmes de l'origine, son abscisse est donc* $A\left(\frac{7}{5}\right)$.
- *Pour aller plus vite et ne pas se tromper en comptant sur de grandes quantités, on peut ne compter qu'à partir d'une graduation déjà marquée :*

  *Par exemple pour trouver l'abscisse du point B, je pars de 3, qui correspond à 15 cinquièmes, et je compte à partir de là c'est donc 16 cinquièmes :* $B\left(\frac{16}{5}\right)$.

# IV - Comparer des fractions

## a. Comparer deux fractions de même dénominateur

On peut écrire des fractions avec des mots : 5 quarts et 3 quarts par exemple. Ces fractions permettent de compter des quarts. Plus il y a de quarts et plus la fraction est grande, donc $\frac{5}{4} > \frac{3}{4}$.

> Pour comparer deux fractions de mêmes dénominateurs, on compare leurs numérateurs.

**Exemples**

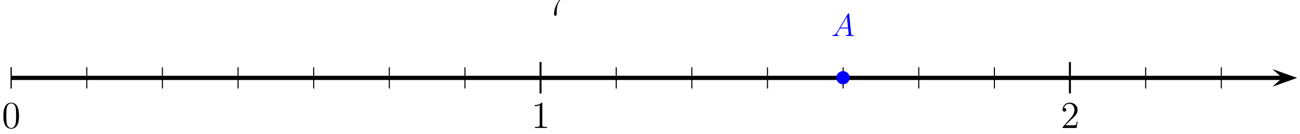
$\frac{8}{12} > \frac{7}{12}$ $\qquad$ $\frac{12}{91} < \frac{52}{91}$ $\qquad$ $\frac{2}{3} > \frac{1}{3}$ $\qquad$ $\frac{4}{3} > \frac{3}{3} = 1$

**Remarques**

- $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ *en effet, plus l'unité est coupée en un grand nombre de « parts » plus la part est petite !*
- *Pour comparer une fraction avec 1, on compare le numérateur avec le dénominateur :* $\frac{14}{13} > 1$ *car* $14 > 13$ *alors que* $\frac{97}{99} < 1$ *car* $97 < 99$.
- *Si les fractions que tu veux comparer ne sont pas au même dénominateur, change le(s) dénominateur(s) grâce à la règle fondamentale des fractions pour pouvoir les comparer.*

## b. Encadrer une fraction par deux nombres entiers consécutifs

Lorsqu'on place une fraction sur un axe, on peut alors lire sur les graduations quels sont les entiers les plus proches de cette fraction. Par exemple, pour $\frac{11}{7}$ :




On détermine ainsi que $1 < \frac{11}{7} < 2$.

Sans axe gradué, on cherche dans la table de 7 quel nombre est juste avant et juste après 11 :
$7 \times 1 = 7 < 11 < 14 = 7 \times 2$, donc $\underbrace{\frac{7}{7}} < \frac{11}{7} < \underbrace{\frac{14}{7}}$

$$1 < \frac{11}{7} < 2$$

**Exemples**

*Encadre les fractions* $\frac{73}{6}$, $\frac{107}{9}$ *et* $\frac{58}{8}$ *entre deux entiers consécutifs.*

$\frac{72}{6} = 12 < \frac{73}{6} < 13$ $\qquad$ $\frac{99}{9} = 11 < \frac{107}{9} < 12$ $\qquad$ $\frac{56}{8} = 7 < \frac{58}{8} < 8$

**Correction de l'exercice**

$5 \times \dfrac{1}{5} = 1$ $5 \times \dfrac{3}{5} = 3$ $7 \times \dfrac{6}{7} = 6$ $3 \times \dfrac{5}{3} = 5$