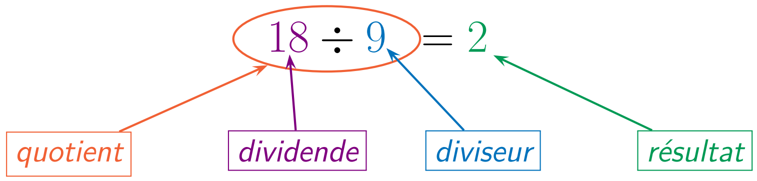
Divisions

I - Les divisions

Définition

Le résultat de la division est le ***quotient****.*



Mais que se passe-t-il si on effectue le quotient de 19 par 5 ?

- $5 \times 3 = 15$ donc 3 est plus petit que le quotient de 19 par 5
- $5 \times 4 = 20$ donc 4 est plus grand que le quotient de 19 par 5.

Le quotient de 19 par 5 est compris entre 3 et 4. Pour l'exprimer plus précisément, on a deux choix :

- Soit on se contente de 3 et on annonce qu'il y a un **reste** : $5 \times 3 + 4 = 19$ donc le quotient de 19 par 5 est 3 reste 4. C'est ce qu'on appelle une division **euclidienne**.
- Soit on cherche les chiffre des dixièmes dans le quotient :
  190 dixièmes $\div\, 5 = 38$ dixièmes donc $19 \div 5 = 3,8$.
  Et s'il y a encore un reste, on peut continuer ce procédé en prenant un zéro inutile dans les centièmes, les millièmes, etc. autant que besoin !

Il y a donc deux divisions :

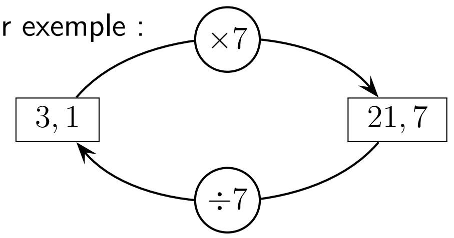
1. **La division euclidienne** se fait dans le « monde » des nombres **entiers**. On a des choses qu'on ne peux pas partager (par exemple des élèves) et on veut faire des groupes. Par exemple pour faire des groupes de 5 avec 22 élèves, on aura 5 groupes de 4 élèves, et 2 élèves tous seuls. Cette phrase correspond à l'égalité $22 = 5 \times 4 + 2$ qui est la division euclidienne de 22 par 5.

   Plus généralement on a : $\boxed{\text{dividende} = \text{diviseur} \times \text{quotient} + \text{reste}}$ où reste $<$ diviseur

   Tu peux remarquer que la division euclidienne n'est pas vraiment une opération : elle n'a pas de symbole et elle n'a pas un résultat mais deux (le quotient et le reste).

2. **La division exacte** se fait dans l'ensemble de tous les nombres. On aura donc des résultats sous forme de nombres décimaux, mais aussi sous forme de fractions. Cette division est l'opération inverse de la multiplication. Elle permet donc de « revenir en arrière », pour annuler une multiplication.

Par exemple :



correspond aux opérations : $\boxed{3,1 \times 7 = 21,7}$ ou $\boxed{21,7 \div 7 = 3,1}$.

Effectuer l'opération $\boxed{21,7 \div 7 = ?}$ revient exactement au même que résoudre l'opération à trou : $\boxed{? \times 7 = 21,7}$.

II - Poser une division

Pour poser une division euclidienne ou une division exacte, l'algorithme est le même : méthode.

La différence réside dans le fait que dans le premier cas, après avoir abaissé le chiffre des unités on s'arrêtera quelque soit le reste, alors que dans le deuxième on pourra abaisser le chiffre des dixièmes (qui est un « zéro inutile »), puis des centièmes, etc.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
 & 7 & 2 & 3 & 3 \\ \cline{5-5}
- & \underline{6} & & & 2\ 4\ 1 \\
 & 1 & 2 & & \\
- & \underline{1} & \underline{2} & & \\
 & & 0 & 3 & \\
 & - & & \underline{3} & \\
 & & & 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
 & 6 & 8 & 3 & & & 4 \\ \cline{7-7}
- & \underline{4} & & & & & 1\ 7\ 0{,}7\ 5 \\
 & 2 & 8 & & & & \\
- & \underline{2} & \underline{8} & & & & \\
 & & 0 & 3 & & & \\
 & - & & \underline{0} & & & \\
 & & & 3 & 0 & & \\
 & & - & \underline{2} & \underline{8} & & \\
 & & & & 2 & 0 & \\
 & & & - & \underline{2} & \underline{0} & \\
 & & & & & 0 &
\end{array}
$$

Quand le quotient est un nombre entier, on ne peut pas différencier une division posée exacte et une division euclidienne (le reste est égal à zéro).

Remarque

*Toutes les divisions exactes ne sont pas possibles ! En effet, parfois on pourra continuer la division à l'infini sans qu'elle ne s'arrête jamais. Cela signifie que le quotient n'est **pas un nombre décimal**. On pourra alors l'écrire sous forme d'une fraction.*

Par exemple :

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrr|l}
 & 1 & & & & & & & & & & 3 \\ \cline{12-12}
- & \underline{0} & & & & & & & & & & 0{,}3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3 \\
 & 1 & 0 & & & & & & & & & \\
- & & \underline{9} & & & & & & & & & \\
 & & 1 & 0 & & & & & & & & \\
 & - & & \underline{9} & & & & & & & & \\
 & & & 1 & 0 & & & & & & & \\
 & & - & & \underline{9} & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 0 & & & & & & \\
 & & & - & & \underline{9} & & & & & & \\
 & & & & & 1 & 0 & & & & & \\
 & & & & - & & \underline{9} & & & & & \\
 & & & & & & 1 & 0 & & & & \\
 & & & & & - & & \underline{9} & & & & \\
 & & & & & & & 1 & 0 & & & \\
 & & & & & & - & & \underline{9} & & & \\
 & & & & & & & & 1 & 0 & & \\
 & & & & & & & - & & \underline{9} & & \\
 & & & & & & & & & 1 & 0 & \\
 & & & & & & & & - & & \underline{9} & \\
 & & & & & & & & & & 1 &
\end{array}
$$

Le quotient de 1 par 3 se note simplement $\frac{1}{3}$.

Si tu veux absolument utiliser une écriture décimale, on donnera alors un arrondi :
$1 \div 3 \approx 0,3333$ *(ici par exemple j'ai laissé 4 chiffres après la virgule, c'est un arrondi au dix-millième).*

III - Critères de divisibilité

Définition

Ces quatre phrases donnent la même information :

- *« 18 est un **multiple** de 6 »*
- *« 6 est un **diviseur** de 18 »*
- *« 18 est **divisible par** 6 »*
- *« 6 **divise** 18 »*

Dans tous les cas, cela signifie qu'on peut écrire 18 comme le produit de 6 par un nombre entier (c'est bien le cas puisque $18 = 6 \times 3$).

Les mots « diviseur » et « divisible » ont la même racine que le mot « division ».
*En fait « 18 est divisible par 6 » signifie que la division $18 \div 6$ a pour résultat un nombre **entier**.*

On peut savoir à l'avance si une division aura un reste ou non grâce à ces astuces :

Critères de divisibilités

Un nombre est un multiple de :

→ 2 lorsque son dernier chiffre est 0, 2, 4, 6 ou 8

→ 5 lorsque son dernier chiffre est 0 ou un 5

→ 10 lorsque son dernier chiffre est 0

→ 3 lorsque la somme de ses chiffres est un multiple de 3

→ 9 lorsque la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

Exemples

- *Je sais que le résultat de $48\,454 \div 2$ est nombre entier, parce que le dividende est un multiple de 2 (il termine par un 4)*
- *Je sais que le quotient de 945 par 3 est un nombre entier car $9 + 4 + 5 = 18$ qui est un multiple de 3.*
- *Je sais que le quotient de 768 par 5 n'est **pas** un nombre entier car le dividende n'est pas un multiple de 5.*

Remarque

Pour 3 et 9 il faut parfois « recommencer » l'addition des chiffres. Par exemple, $6\,387$ est un multiple de 3 car $6 + 3 + 8 + 7 = 24$ et $2 + 4 = 6$.

Attention : ces critères s'appliquent **seulement** à 2, 5, 10, 3 et 9. Il n'y a pas de critère de divisibilité « facile » pour 7 par exemple.

À faire : Pixel art sur la divisibilité

IV - Problèmes

1. Je veux partager équitablement 153 Schoko-Bons® aux 20 élèves d'une classe de 6ème. Combien de Schoko-Bons® aura chaque élève au maximum ? Combien en restera-t-il pour moi ?

$$\begin{array}{r|l} 1\,5\,3 & 2\,0 \\ \cline{2-2} -1\,4\,0 & 7 \\ \cline{1-1} 1\,3 & \end{array}$$

Ce qui fait 7 Schoko-Bons® par élève et il en reste 13 pour moi !

Remarque : si on ne veut pas poser la division euclidienne, on peut directement écrire :

$$153 = 20 \times 7 + 13$$

2. 147 élèves sont répartis par équipe de 16 pour un concours. Combien d'équipes entières peut-on constituer ? Combien manquerait-il d'élèves pour constituer la dernière équipe ?

$$\begin{array}{r|l} 1\,4\,7 & 1\,6 \\ \cline{2-2} -1\,4\,4 & 9 \\ \cline{1-1} 3 & \end{array}$$

Pour faire cette division, on peut écrire la table de 16 sur son brouillon, en ajoutant 16 à chaque étape : 16, 32, 48,...
On peut décomposer 147 grâce à la division euclidienne :

$$147 = 16 \times 9 + 3$$

Il y a donc 9 équipes de 16 élèves complètes, et il manque $16 - 3 = 13$ élèves pour constituer la $17^{\text{ème}}$ équipe.

3. Un bibliothécaire doit répartir 420 livres sur des étagères. Chaque étagère doit contenir le même nombre de livres. Est-ce possible avec 18 étagères ? Avec 21 étagères ?

$$\begin{array}{r|l} 4\,2\,0 & 1\,8 \\ \cline{2-2} -3\,6 & 2\,3 \\ \cline{1-1} 6\,0 & \\ -5\,4 & \\ \cline{1-1} 6 & \end{array}$$

$420 = 18 \times 23 + 6$, *donc si on met 23 livres sur chaque étagère, il restera 6 livres. Le bibliothécaire ne pourra pas mettre le même nombre de livre sur chaque étagère.*

$420 = 21 \times 20$, *donc si on essaye de répartir 420 livres sur 20 étagères, il y aura 20 livres sur chaque étagères. C'est donc possible de répartir les livres équitablement sur 21 étagères.*

$$\begin{array}{r|l} 4\,2\,0 & 2\,1 \\ \cline{2-2} -4\,2 & 2\,0 \\ \cline{1-1} 0\,0 & \\ -\;\;0 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Connaissances et compétences du chapitre :

- Connaître le vocabulaire liés aux divisions (division exacte et division euclidienne)
- Connaître et mettre en œuvre un algorithme de calcul posé pour effectuer la division d'un entier par un entier et pour une nombre décimal divisé par un entier.
- Critères de divisibilité
- Résoudre des problèmes mettant en jeu les 4 opérations.
- Vérifier la vraisemblance d'un résultat, notamment en estimant un ordre de grandeur.