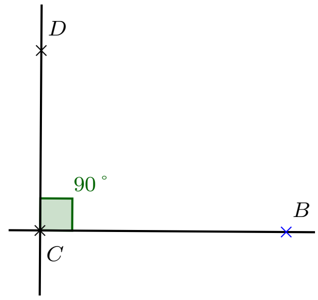
Angles - Triangles - Bissectrice

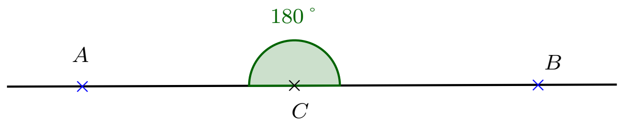
I - Rappels du chapitre 8

Rappels

- *Un angle droit vaut 90°*
- *Un angle plat vaut 180°*



$\widehat{DCB} = 90\,^\circ$

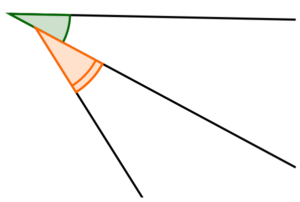


Si les points A, C et B sont alignés dans cet ordre, $\widehat{ACB} = 180$

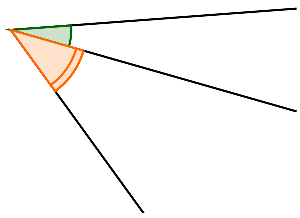
Définition

Deux angles sont **adjacents** *si et seulement si :*

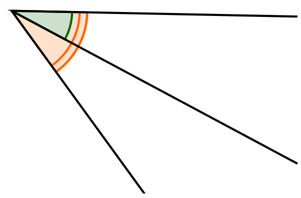
1. *ils ont le même sommet*
2. *ils ont un côté en commun*
3. *ils sont de part et d'autre du côté commun*



Les angles marqués ne sont pas adjacents : ils n'ont pas le même sommet



Les angles marqués sont adjacents



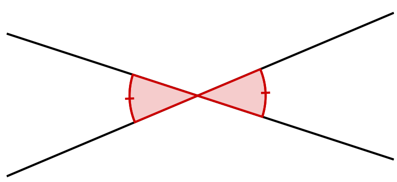
Les angles marqués ne sont pas adjacents : ils sont du même côté du côté commun

Définition

- *Deux angles dont la somme vaut 90° sont* **complémentaires**.
- *Deux angles dont la somme vaut 180° sont* **supplémentaires**.

Définition

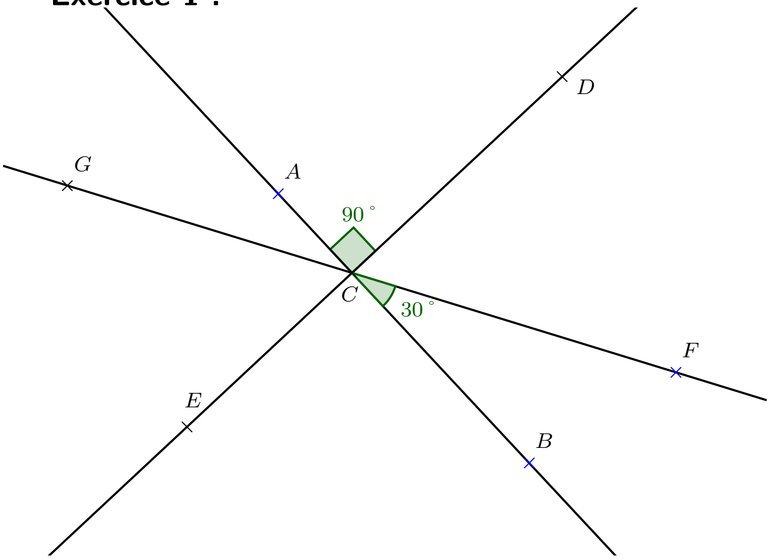
Des angles **opposés par le sommet** *sont formés par les mêmes droites, mais sont "en face" l'un de l'autre.*



Théorème

Deux angles opposés par le sommet ont la même mesure.

Exercice 1 :



Sur le dessin si-contre, les droites (AB) et (DE) sont perpendiculaires. Les droites (AB), (DE) et (GF) sont concourantes en C.

$\widehat{BCF} =$ ....

$\widehat{DCF} =$ ....

$\widehat{DCE} =$ ....

$\widehat{GCA} =$ ... car ....

....

$\widehat{ECB} =$ ....

Correction en fin de document
Exercice 60 page 231 - Soigne la justification !

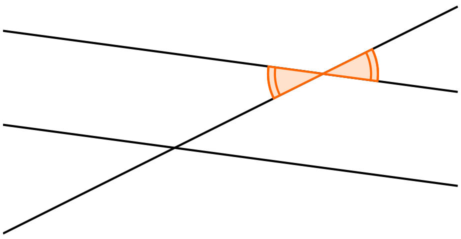
II - Angles particuliers

Définition

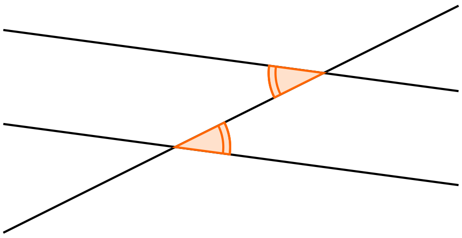
Lorsque deux droites parallèles sont coupées par une sécante, on créé des paires d'angles particuliers :*

- ★ *des angles* **alternes-internes** *(il sont entre les deux droites parallèles, mais de part et d'autre de la sécante)*
- ★ *des angles* **correspondants** *(il sont du même côté de la sécante, mais formés par chacune des deux droites parallèles. Ils se superposent si on glisse le long de la sécante)*

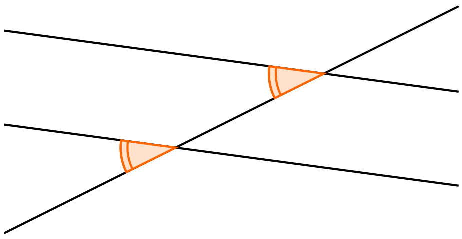
* La sécante est la droite qui coupe les deux droites parallèles.



Opposés par le sommet



Alternes-internes



Correspondants

Remarque

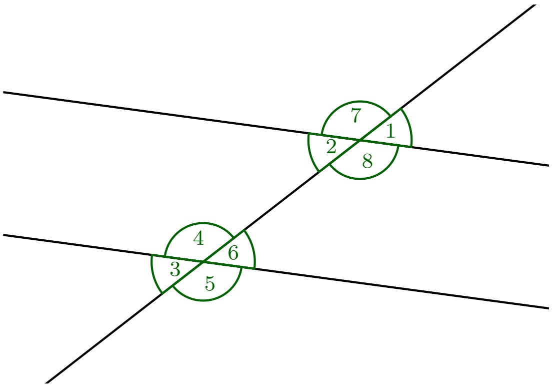
Ces définitions sont encore valables si les deux droites ne sont pas parallèles, mais on les utilise toujours dans la situation où les deux droites sont parallèles car ces angles sont alors égaux.

Théorème

Si deux droites sont parallèles, alors les angles alternes-internes formés par une sécante sont égaux.*
Si deux angles alternes-internes sont égaux, alors les deux droites qui forment ces angles sont parallèles.*

** fonctionne aussi avec des angles correspondants.*

Exercice 2 :



Sur la figure ci-contre, on a deux droites parallèles et une sécante. Colorier d'une même couleur les angles qui sont égaux. Complétez les phrases suivantes :

Les angles 1 et 2 sont . . . .

Les angles 7 et 4 sont . . . .

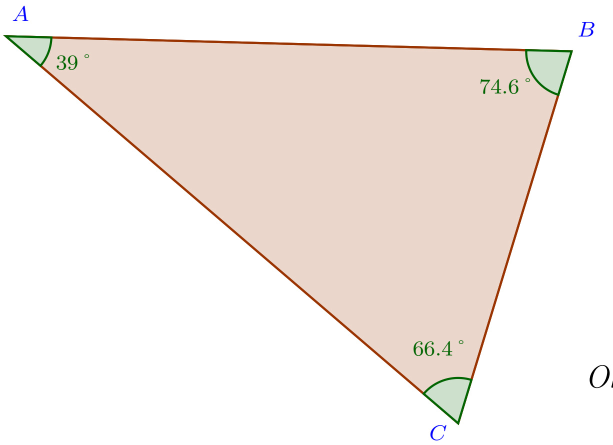
Les angles 4 et 5 sont . . . .

Les angles 4 et 8 sont . . . .

Les angles 2 et 6 sont . . . .

Correction en fin de document

III - Somme des angles d'un triangle



Trace un triangle quelconque, puis a mesure avec un rapporteur ses 3 angles.
Si tu ne te souviens plus comment on mesure un angle : permis rapporteur

Calculons maintenant la somme des trois angles trouvés :
$39\,^{\circ} + 74,6\,^{\circ} + 66,4\,^{\circ} = 180\,^{\circ}$

Oh, c'est pile la valeur d'un angle plat ! Coïncidence ?

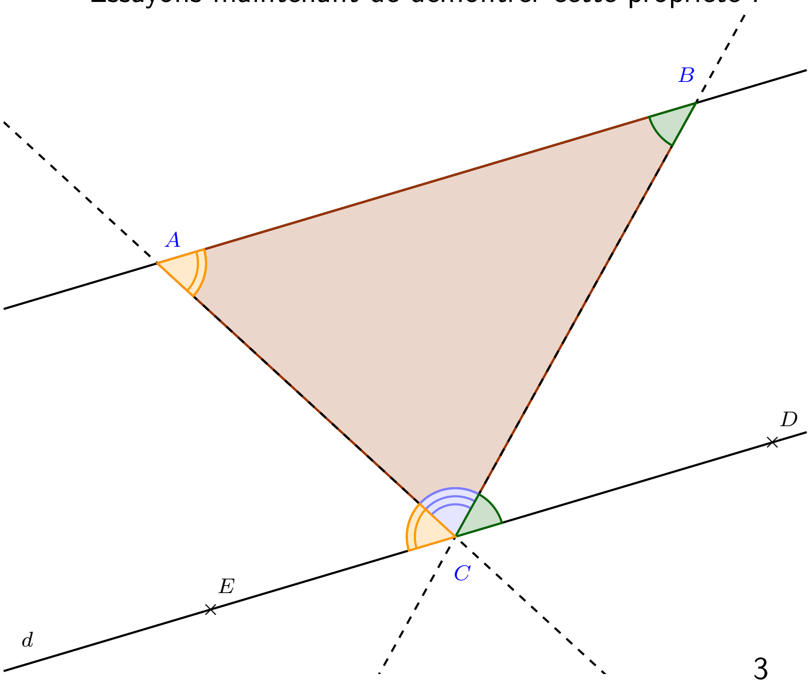
Si nous trouvons ce résultat singulier alors que le triangle était quelconque, on peut penser qu'on trouverait la même chose avec n'importe quel triangle.

Définition

*Une **conjecture** est un énoncé que l'on pense vrai (parce qu'on a testé un certain nombres de situations, et que ça semble fonctionner), mais qu'on n'a pas démontré.*

Ici, on peut faire la **conjecture** que pour n'importe quel triangle, la somme de ses angles est égale à 180°.

Essayons maintenant de démontrer cette propriété :



- On construit un triangle ABC quelconque.
- On trace la droite (DE), parallèle à (AB) passant par C.

On a alors deux droites parallèles coupées par deux sécantes. Cela forme des angles alternes-internes et des angles correspondants égaux.

En particulier, les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ACE}$ sont alternes-internes donc égaux ; et les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ACE}$ sont alternes-internes donc égaux.

Par construction, les angles $\widehat{ECA}$, $\widehat{ACB}$ et $\widehat{BCD}$ sont adjacents, et leur somme vaut 180°(car les 3 ensemble forment un angle plat).

Cela montre que la somme des 3 angles de n'importe quel triangle vaut toujours 180°.

Maintenant que nous l'avons démontrée, ce n'est plus une conjecture mais un théorème !

Théorème

La somme des 3 angles d'un triangle vaut toujours 180°

Exercice 3 :

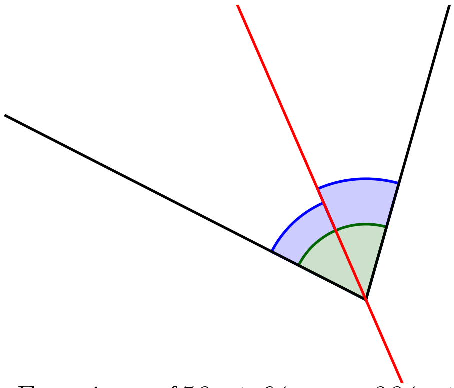
1. Calculer la valeur des angles d'un triangle équilatéral.
2. Démontrer que les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires.

Correction en fin de document

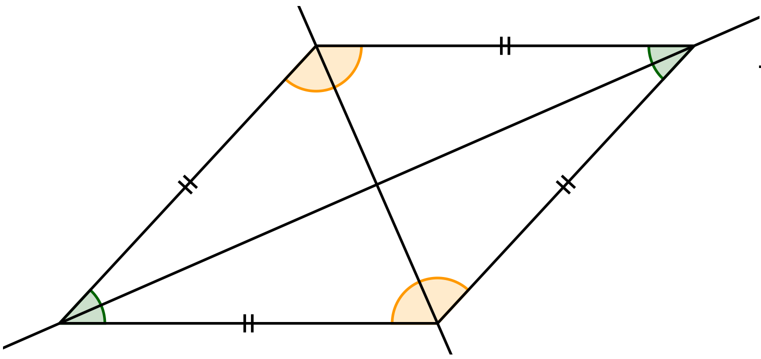
IV - Bissectrices

Définition

La bissectrice d'un angle est la droite qui coupe cet angle en deux angles adjacents égaux.



Exercices n°58 et 61 page 231 et 71 page 232



Propriété

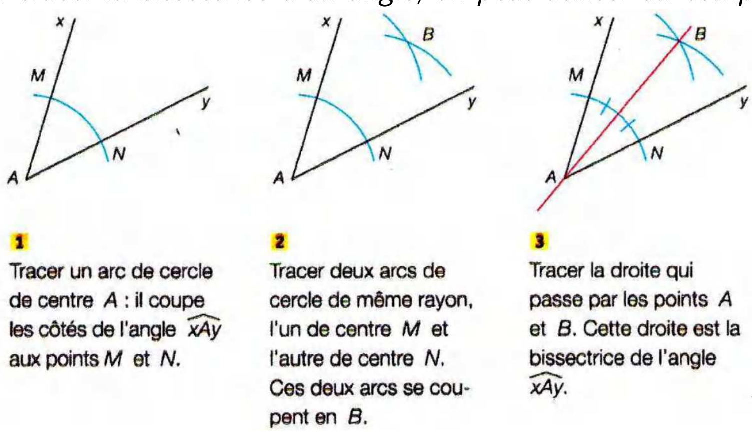
Dans un losange, les diagonales sont les bissectrices des angles.

Cette propriété est vraie parce que les diagonales sont les axes de symétrie du losange. En pliant le long de ces axes, chaque moitié d'angle se superpose bien à l'autre : elles sont égales.

Lorsqu'on a déjà deux demi-droite (un angle), il est facile de compléter la figure pour former un losange avec un compas. Cela permet de construire la bissectrice de l'angle de façon bien plus précise qu'en mesurant avec le rapporteur :

Méthode

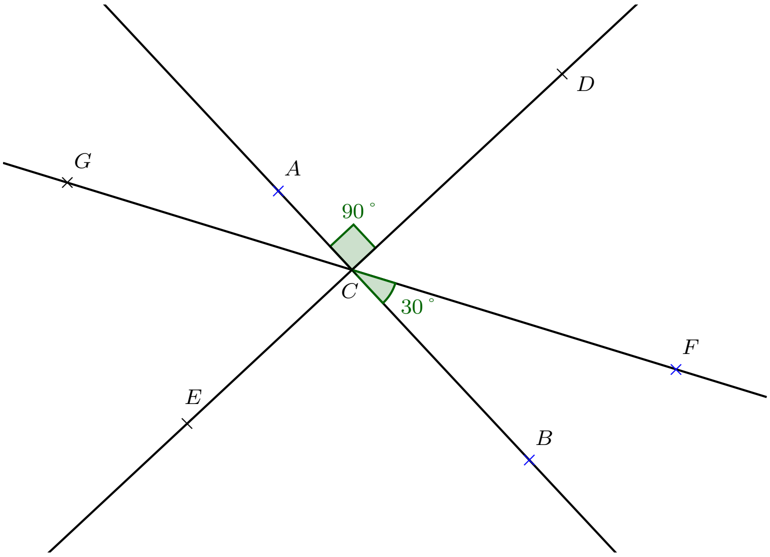
Pour tracer la bissectrice d'un angle, on peut utiliser un compas :



Exercice n°63 page 230

Correction des exercices

Exercice 1 :



Sur le dessin si-contre, les droites (AB) et (DE) sont perpendiculaires. Les droites (AB), (DE) et (GF) sont concourantes en C.

$\widehat{BCF} = 30\,^\circ$

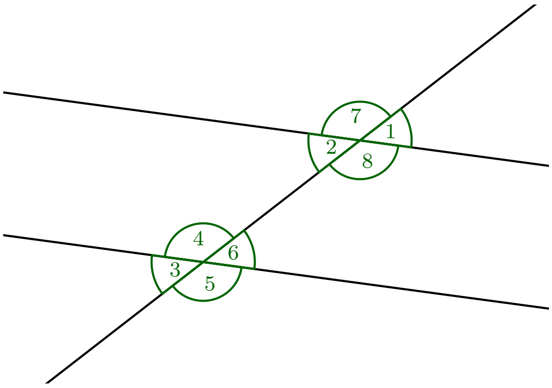
$\widehat{DCF} = \widehat{DCB} - \widehat{BCF} = 90\,^\circ - 30\,^\circ = 60\,^\circ$

$\widehat{DCE} = 180\,^\circ$ (c'est un angle plat)

$\widehat{GCA} = 30\,^\circ$ car il est opposé par le sommet avec l'angle $\widehat{BCF}$.

$\widehat{ECB} = 90\,^\circ$ car les droites (DE) et (AB) sont perpendiculaires.

Exercice 2 :



Sur la figure ci-contre, on a deux droites parallèles et une sécante. Colorier d'une même couleur les angles qui sont égaux. Complétez les phrases suivantes :

Les angles 1 et 2 sont opposés par le sommet

Les angles 7 et 4 sont correspondants

Les angles 4 et 5 sont opposés par le sommet

Les angles 4 et 8 sont alternes-internes

Les angles 2 et 6 sont alternes-internes

Exercice 3 :

1. Calculer la valeur des angles d'un triangle équilatéral.
2. Démontrer que les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires.

1. Dans un triangle équilatéral, tous les angles ont la même valeur. La somme de ces trois angles égaux vaut 180° donc un seul de ces angles vaut $180 \div 3 = 60°$.
2. Dans un triangle rectangle, un des angles est droit donc vaut 90°. La somme de cet angle plus les deux autres vaut 180°. Or $90 + 90 = 180$ donc la somme des deux autres angles vaut 90°, ce qui est la définition des angles complémentaires.