Les fractions (suite)

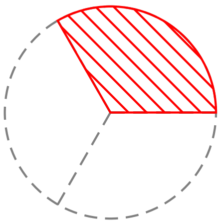
I - Résumé de la première partie

On peut écrire un nombre sous différentes formes : nous connaissons pour le moment l'écriture décimale (qui utilise des chiffres et éventuellement une virgule, comme $1,125$) et l'écriture fractionnaire (numérateur en haut, barre de fraction et dénominateur en bas, comme $\frac{9}{8}$).

Deux écritures du même nombre sont égales : $1,125 = \dfrac{9}{8}$

Définition

Le nombre $\dfrac{1}{3}$ est le nombre qu'il faut prendre 3 fois pour faire 1.
Autrement dit : $3 \times \dfrac{1}{3} = 1$.

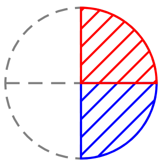


Remarque (***Définitions possibles pour*** $\mathbf{\dfrac{2}{3}}$)

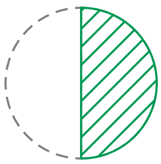
$\dfrac{2}{3} = 2 \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}$ *ou* $3 \times \dfrac{2}{3} = 2$

le double de $\dfrac{1}{3}$ *ou* *il faut le prendre 3 fois pour faire **2**.*

Des **fractions différentes** peuvent désigner le même nombre :



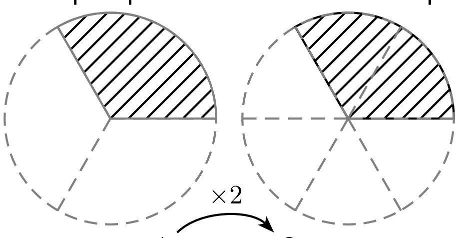
$\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{2}{4}$



$\dfrac{1}{2}$

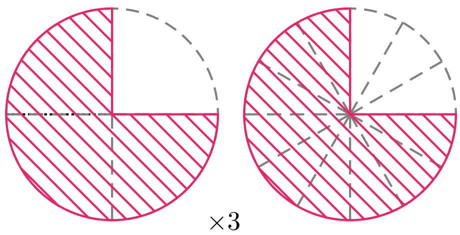
$\left.\dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}\right\}$ ces deux fractions représentent toutes les deux le nombre $0,5$.

En coupant en deux chaque « part »,
on multiplie par deux le nombre de parts.



$$\dfrac{1}{3} \overset{\times 2}{\underset{\times 2}{=}} \dfrac{2}{6}$$

De même quand on les coupe en 3 :

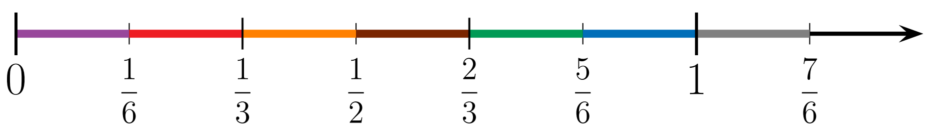


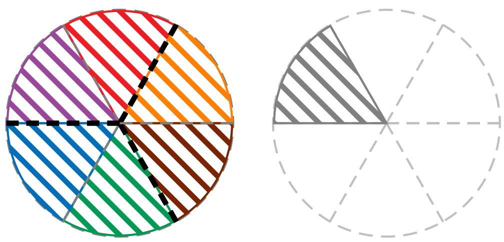
$$\dfrac{3}{4} \overset{\times 3}{\underset{\times 3}{=}} \dfrac{9}{12}$$

À retenir (***Règle fondamentale des fractions***)

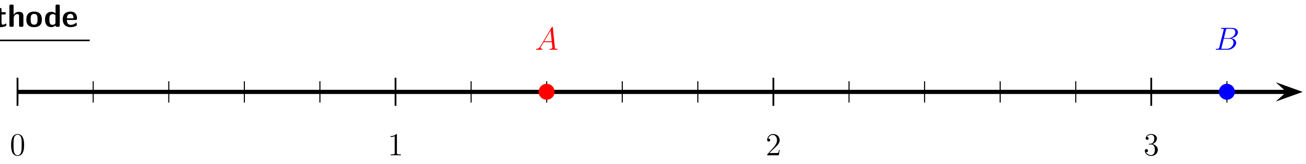
*On ne change pas la valeur d'une fraction en multipliant (ou en divisant) son numérateur **et** son dénominateur par un **même nombre**.*

Sur un axe gradué, le **segment unité** (segment de longueur 1) correspond au disque unité entier (qui représente aussi le nombre 1).





Méthode



- *On repère l'origine (là où est le zéro) et l'unité (là où est le 1) de l'axe.*
- *On compte le nombre de segments entre les graduations entre les deux (ici il y en a 5).*
- *La quantité qui est 5 fois entre 0 et 1, c'est un cinquième* $\left(\frac{1}{5}\right)$.
- *On peut ainsi compter le nombre de cinquièmes pour placer n'importe quelle abscisse qui a un 5 au dénominateur (en bas de la fraction).*

  Par exemple le point A placé sur l'axe ci-dessus est à 7 cinquièmes de l'origine, son abscisse est donc $A\left(\frac{7}{5}\right)$.
- *Pour aller plus vite et ne pas se tromper en comptant sur de grandes quantités, on peut ne compter qu'à partir d'une graduation déjà marquée :*

  Par exemple pour trouver l'abscisse du point B, je pars de 3, qui correspond à $3 \times 5 = 15$ *cinquièmes, et je compte à partir de là c'est donc 16 cinquièmes :* $B\left(\frac{16}{5}\right)$.

II - Comparer des fractions

a. Comparer deux fractions de même dénominateur

On peut écrire des fractions avec des mots : 5 quarts et 3 quarts par exemple. Ces fractions permettent de compter des quarts. Plus il y a de quarts et plus la fraction est grande, donc $\frac{5}{4} > \frac{3}{4}$.

Pour comparer deux fractions de mêmes dénominateurs, on compare leurs numérateurs.

Exemples

$\frac{8}{12} > \frac{7}{12}$ $\qquad$ $\frac{12}{91} < \frac{52}{91}$ $\qquad$ $\frac{2}{3} > \frac{1}{3}$ $\qquad$ $\frac{4}{3} > \frac{3}{3} = 1$

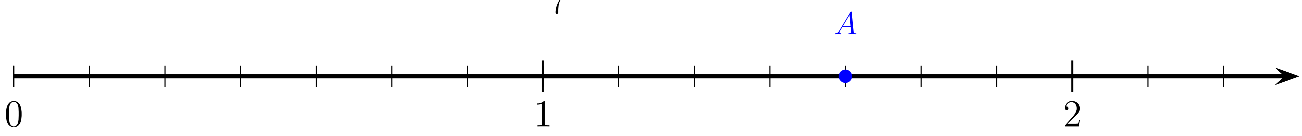
Remarques

- *Attention,* $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$, *il suffit de représenter ces fractions pour s'en convaincre.*
- *Pour comparer une fraction avec 1, on compare le numérateur avec le dénominateur :* $\frac{14}{13} > 1$ *car* $14 > 13$ *alors que* $\frac{97}{99} < 1$ *car* $97 < 99$.
- *Si les fractions que tu veux comparer ne sont pas au même dénominateur, change le(s) dénominateur(s) grâce à la règle fondamentale des fractions pour pouvoir les comparer.*

Exercices n°52 et 53 page 68

b. Encadrer une fraction par deux nombres entiers consécutifs

Lorsqu'on place une fraction sur un axe, on peut alors lire sur les graduations quels sont les entiers les plus proches de cette fraction. Par exemple, pour $\frac{11}{7}$:



On détermine ainsi que $1 < \frac{11}{7} < 2$.

Sans axe gradué, on cherche dans la table de 7 quel nombre est juste avant et juste après 11 :
$7 \times 1 = 7 < 11 < 14 = 7 \times 2$, donc $\underbrace{\frac{7}{7}} < \frac{11}{7} < \underbrace{\frac{14}{7}}$

$$1 < \frac{11}{7} < 2$$

Exemples

Encadre les fractions $\frac{73}{6}$, $\frac{107}{9}$ *et* $\frac{58}{8}$ *entre deux entiers consécutifs.*

$\frac{72}{6} = 12 < \frac{73}{6} < 13$ $\qquad$ $\frac{99}{9} = 11 < \frac{107}{9} < 12$ $\qquad$ $\frac{56}{8} = 7 < \frac{58}{8} < 8$

III - Fraction d'une quantité

a. Comprendre et calculer la fraction d'une quantité

Dans le langage courant, on trouve des fractions dans de nombreux contextes :

- « Tout s'est passé en un dixième de seconde ! »
- « Il ne reste qu'un tiers du gâteau. »
- « Les trois quarts de la population est concernée par cette taxe. »

Dans tous ces cas, la fraction est suivie **<u>d'</u>une quantité de quelque chose**. Cela signifie que **la fraction désigne une partie de cette quantité**.

- **Un dixième <u>de</u> seconde** c'est une part de seconde coupée en 10, c'est $0,1$ seconde.
- **Le tiers <u>du</u> gâteau** c'est la part qu'il reste lorsqu'on a coupé le gâteau en 3 parts égales et qu'on en a retiré 2.
- **Les trois quarts <u>de</u> la population** signifie que si la population totale est représentée par un disque, alors les trois quarts de ce disque représentent la population concernée par la taxe.

Définition

Un tiers d'une quantité totale, c'est la quantité qu'il faut prendre 3 fois pour faire cette quantité totale.

Pour les deux tiers d'une quantité totale, on peut le voir sous deux points de vue :

- c'est le double de un tiers de cette quantité totale
- c'est la quantité qu'il faut prendre 3 fois pour faire 2 fois la quantité totale

Ces définitions peuvent se décliner avec toutes les fractions comme pour la définition des fractions vue en début d'année.

Exercice n°73 page 70

Exemples

- *Un tiers d'un paquet de 300 g de spaghetti, c'est* $100\,g$ *de spaghetti.*
- *Pour un quart d'une boite de 12 œufs, on cherche* $? \times 4 = 12$, *ce qui fait* 3 *œufs.*
- *Pour les trois quarts d'une tablette de chocolat qui contient 16 carreaux, on cherche* $? \times 4 = 3 \times 16$. *Quatre fois la quantité recherchée est 48 g, donc la quantité est* $48 \div 4 = 12$.

On peut remarquer que dans chaque cas, le résultat correspond simplement à la fraction multipliée à la quantité :

$$100\,g = \frac{1}{3} \times 300\,g \qquad 3 \text{ œufs} = \frac{1}{4} \times 12 \text{ œufs} \qquad 12 \text{ carreaux} = \frac{3}{4} \times 16 \text{ carreaux}$$

> On peut calculer une fraction d'une quantité en multipliant la quantité par la fraction.

Par exemple, la population française est de 68 606 000 habitants, donc les trois quarts de cette population, c'est :

$$\frac{3}{4} \times 68\,606\,000 = 51\,454\,500 \text{ habitants}$$

Exercices n°39, 41, 42 et 43 page 67 et 71 page 69

b. Pourcentages

Un pourcentage est une autre façon d'écrire une fraction sur 100 :

$$72\,\% = \frac{72}{100} = 0,72 \qquad 1\,\% = \frac{1}{100} = 0,01 \qquad 6,4\,\% = \frac{6,4}{100} = 0,064 \qquad 100\,\% = \frac{100}{100} = 1$$

Définition

$p\,\% = \dfrac{p}{100}$ *où* p *est n'importe quel nombre*

Exemple

Selon une enquête du CNL (Centre National du Livre) publiée en mars 2024, 84 % des collégiens en France ont lu au moins un manga dans l'année.

Imaginons que ce pourcentage est valable au collège Mermoz, dans lequel sont inscrits 395 élèves. Combien d'élèves n'auraient pas lu de manga cette année ?

Calculons le nombre d'élèves qui ont lu un manga cette année :

$84\% \times 395 = \frac{84}{100} \times 395 = 0,84 \times 395 = 331,8 \approx 332$ *élèves.*

Il y aurait donc environ $395 - 332 = 63$ *élèves qui n'ont pas lu de manga cette année dans le collège.*

Pour calculer plus vite, mais aussi pour mieux comprendre des portions, certaines correspondances entre fraction, pourcentage et écriture décimale sont à apprendre par cœur :

Fractions	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{5}$
Écriture décimale	0,1	0,01	0,5	0,25	0,75	0,2
Pourcentage	10 %	1 %	50 %	25 %	75 %	20 %

Exercices n°12, 14, 15 et 17 page 85, 36 et 37 page 87